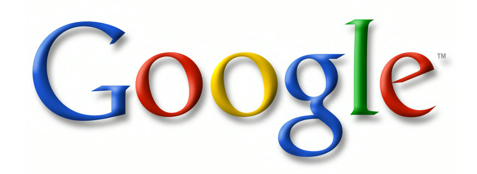


ELEMENTE

DER

GEOMETRIE

VON

Prof. DR. FRIEDRICH KRUSE,
OBERLEHRER AM KÖNIGL. WILHELMSGYMNASIUM ZU BERLIN.

ERSTE ABTHEILUNG.

GEOMETRIE DER EBENE.

BERLIN.
WEIDMANN'SCHE BUCHHANDLUNG.
1875.

Alexander Ziwet

GEOMETRIE DER EBENE

SYSTEMATISCH ENTWICKELT

VON

Prof. DR. FRIEDRICH KRUSE,

OBERLEHRER AM KÖNIGL. WILHELMSGYMNASIUM IN BERLIN.

BERLIN.

WEIDMANN'SCHE BUCHHANDLUNG.

1875.

Vorwort.

Da die vorliegenden Elemente von ihren Vorgängern in wesentlichen Stücken abweichen, so scheint es geboten, ihre Stellung zum Gegenstande kurz zu beleuchten.

Die Geometrie hat es, wie alle mathematischen Wissenschaften, mit Grössen zu thun. Die geometrischen Grössen unterscheiden sich aber von den übrigen dadurch, dass an ihnen als eine wesentliche Eigenschaft der Begriff der Lage haftet. Hieraus ergiebt sich für die wissenschaftliche Entwickelung der Geometrie die Aufgabe: den Zusammenhang zwischen den diesem Gebiete eigenthümlichen, besonderen Beziehungen der Lage und den allgemeineren der Grössen zu ermitteln.

Die Elemente Euklids — so wohl verdient auch das Ansehen ist, in dem sie nun seit mehr als 2100 Jahren gestanden haben — lösen diese Aufgabe nicht, da sie auf die Lage der Gebilde nur wenig Rücksicht nehmen. Es war Leibniz (1646—1716), der den Mangel nachwies und eine neue Darstellung der Geometrie (calculus [analysis] situs) forderte*), in welcher die Grössenbeziehungen der geometrischen Gebilde aus der Lage abzuleiten und mittels einer geeigneten Bezeichnung (characteristica geometrica) der Rechnung zugänglich zu machen wären. Zur weiteren Begründung seiner Forderung hob er hervor, dass zwar einige Schriften von Euklid und Apollonius (um 200 v. Chr.) die Lage mehr beachteten als die „Elemente“, dass aber weder Euklid's „Data“, noch die von Pappos (um 300

*) Leibnizens mathematische Schriften, herausgegeben von C. J. Gerhardt. V. S. 141—183.

n. Chr.*) verzeichneten Sätze aus den verlornen Schriften der Alten, noch endlich die Arbeiten ihrer Wiederhersteller die vorliegende Aufgabe gründlich und umfassend genug behandelt hätten. In der Durchführung seiner leitenden Gedanken kam Leibniz jedoch nicht über geringe Anfänge — bezüglich der Lehre von der Congruenz und der Aehnlichkeit — hinaus; seinem Wegweiser fehlte der Weg.

Und doch war die Spur desselben in der längst bekannten Wahrheit enthalten: dass die Grössenverhältnisse perspectivischer Abbildungen durch ihre Lage gegen den abgebildeten Gegenstand und den Gesichtspunkt bestimmt sind. Auch waren vor Leibniz einzelne metrische Eigenschaften perspectivischer Gebilde von Pappos, Leonardo da Vinci (1500), Albrecht Dürer (1525), Guido Ubaldi (1600), Desargues (1636) und Pascal (1640) ermittelt worden. Nach ihm wies namentlich Lambert auf den innigen Zusammenhang zwischen Perspective und Geometrie hin**). Die engsten Bande zwischen beiden hat aber erst das gegenwärtige Jahrhundert geknüpft. Gleich am Anfange desselben erinnerte Carnot***) an die von Leibniz gestellte Aufgabe und förderte ihre Lösung, indem er den Zusammenhang zwischen der Gestalt einer Figur und dem metrischen Ausdrucke für ihre Bestandtheile untersuchte. Einen recht bedeutenden Fortschritt erzielte später Poncelet dadurch, dass er allgemein die Lage centralperspectivischer Gebilde zur Ermittelung von Grössenbeziehungen verwendete; die Euklidische Geometrie berührte er jedoch nur wenig. A. F. Möbius entwickelte wichtige Lagen- und Grössenbestimmungen, hüllte aber leider viele seiner geometrischen Entdeckungen in ein arithmetisches Gewand, das sie manchem Blicke entzog. Die Arbeiten von J. Steiner und M. Chasles erweiterten und vertieften die Kenntniss der projectivischen Eigenschaften, stellten aber keine organische Verbindung derselben mit den „Elementen“ her. Da der Auffassung dieser Geometer ihre Nachfolger, Seydewitz, v. Staudt u. A. im Wesentlichen beitraten, so gelangte man nach und nach zu

*) H. Usener: Rhein. Museum. Bd. 28 (1873). S. 403.

**) J. H. Lambert: Freie Perspective (1774) I. S. 12. II. S. 52. 161.

***) L. N. M. Carnot: Géom. de position (1803). Uebersetzt von Schumacher (1808 und 1810) I. S. 2.

einer vollständigen Trennung der neueren von der älteren (Euklidischen) Geometrie, die nun als „Geometrie der Lage“ und „Geometrie des Masses“ einander gegenüber gestellt wurden. Diese Sonderung wird offenbar dadurch nicht aufgehoben, dass man in eine Darstellung der Euklidischen Geometrie einzelne Sätze oder Theorien aus der neueren aufnimmt. Indess deutet schon Seydewitz an, dass dieser Zustand nicht befriedigend, und in welchem Sinne er zu verbessern sei, wenn er sagt*): „Wird unter allen geometrischen Prinzipien das der Projectivität für das natürlichste und umfassendste erkannt, so ist es doch noch nicht gelungen, diesem Prinzipe auch im Gebiete der Euklidischen Geometrie die Herrschaft zu verschaffen.“

Mittels einer eingehenderen Gliederung der perspectivischen Lage glaube ich diese Herrschaft fest begründet und die Grundlagen eines Lehrgebäudes klar gelegt zu haben, das den richtigen wissenschaftlichen und didaktischen Anforderungen in hohem Grade genügt. Es ist darin die herkömmliche arithmetische Form wichtiger systematischer Grundbegriffe (der Congruenz, Affinität, Aehnlichkeit u. s. w.), und damit der störende Einfluss der Arithmetik auf die wissenschaftliche Anordnung der Geometrie beseitigt. Dagegen tritt neu hervor eine ungleich grössere Bestimmtheit, Klarheit und Fruchtbarkeit des Gedankenganges, der die bisher isolirten Theorien als nothwendige Glieder dem Ganzen einfügt, die noch vorhandenen Lücken mit Leichtigkeit erkennen lässt und so zu weiteren Forschungen einladet.

In der vorliegenden Abtheilung dieser Elemente tritt zu dem grundlegenden ersten Buche das zweite als eine Erweiterung nach einer Richtung hinzu. Da die Massbestimmungen der geometrischen Gebilde im ersten Buche aus den Eigenschaften der Lage, im zweiten aus denen des rechtwinkligen Dreiecks abgeleitet sind, so hat, unter Andeutung des Ausgangs- und des Zielpunktes der Entwickelung, jenes die Ueberschrift „Thesimetrie“ (ἡ θέσις, die Lage) erhalten, wie dieses den Titel „Trigonometrie“ führt.

Die geometrischen Constructionen trennte bereits Thomas Simpson**) von den Lehrsätzen; ihm folgten darin

---

*) F. Seydewitz: Das Wesen der involutorischen Gebilde in der Ebene (1846) S. IX.

**) Elements of Geometrie. London 1747. 1760.

van Swinden und Legendre. In der vorliegenden Schrift sind sie, nach R. Baltzer's Vorgange, nur selten ausdrücklich berücksichtigt. Anleitung zu Constructionen mit dem Lineale und theilweise mit Benutzung eines festen Kreises gaben J. H. Lambert (Freie Perspective. 1774. S. 162.) und J. Steiner (Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises. 1833). L. Mascheroni zeigte (La geometria del compasso 1797; franz. von Carette 1798; deutsch von Grüson 1825), dass eine geschickte Benutzung des Zirkels das Lineal in vielen Fällen entbehrlich mache. Beide Instrumente lehrte in älterer Zeit Albrecht Dürer (Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit. 1525), neuerdings A. L. Busch (Vorschule der darstellenden Geometrie. 1846. 1868) führen.

Berlin, im Mai 1875.

Friedrich Kruse.

Erklärung der Zeichen.

$\therefore$	bedeutet:	folglich,
$\parallel$	„	parallel,
$\#$	„	parallel und gleich,
$\sqcup$	„	parallel und gleichgerichtet,
$\mid\!/\!\mid$	„	parallel und entgegengesetzt gerichtet,
$\wedge$	„	symmetrisch,
$\backsim$	„	ähnlich,
$\cong$	„	congruent,
ꙅ	„	affin,
ꙅ̶	„	affingleich,
$\barwedge$	„	collinear.

Inhalt.

Seite

Zweites Buch: **Trigonometrie.**

Erstes Hauptstück: Allgemeine Goniometrie.

Zweites Hauptstück: Berechnung des Dreiecks.

Drittes Hauptstück: Berechnung des Vierecks und *n*ecks.

Viertes Hauptstück: Projectivische Gebilde.

Erstes Buch.

Thesimetrie.

Erstes Hauptstück:

Grundbegriffe.

§ 1.

Ursprung derselben.

1. Die Grundbegriffe der Geometrie werden aus folgenden Eigenschaften materieller Körper abgeleitet:

I. Jeder materielle Körper nimmt einen Raum ein, von dem er jeden andern ausschliesst;

II. er ist theilbar und mit ihm sein Raum;

III. er ist beweglich und mit ihm sein Raum.

2. Wir gelangen nun zu den geometrischen Grundbegriffen, indem wir von allen übrigen Eigenschaften der Materie absehen (abstrahiren), so dass uns nur die Vorstellung des reinen Raumes übrig bleibt, in welcher jede Beschränkung der Theilbarkeit und Beweglichkeit beseitigt ist, der die Materie vermöge ihrer andern Eigenschaften unterworfen sein könnte. Wir betrachten also die Raumwelt als nach innen und aussen ununterbrochen: nach innen als stetigen, nach aussen als unendlichen Weltraum.

3. Es ist nun zunächst der Weltraum zu theilen und dann auf die Ergebnisse der Theilung der Gegensatz von Ruhe und Bewegung anzuwenden.

§ 2.

Die Raumelemente.

1. Die Grenze zweier Raumtheile, die unmittelbar an einander stossen, heisst eine Fläche. Die Flächen, welche einen

Theil des Weltraumes von den anstossenden vollständig trennen, bilden vereint seine Oberfläche.

Ein vollbegrenzter Raum wird ein geometrischer Körper (kurzweg: Körper) genannt.

2. Die Grenze zweier an einander stossender Flächentheile heisst eine Linie. Eine Fläche wird durch Linien in Felder getheilt, welche als geschlossen oder offen bezeichnet werden, je nachdem die Grenzlinien begrenzt oder theilweise unbegrenzt sind. Die Grenzlinien eines geschlossenen Feldes bilden vereint seinen Umfang.

3. Zwei zusammenstossende Theile einer Linie haben einen Punkt zur gegenseitigen Grenze. Eine Linie wird durch zwei Punkte, welche Grenzpunkte heissen, vollständig begrenzt.

Eine vollbegrenzte Linie heisst in sich zurücklaufend, wenn ihre Grenzpunkte sich decken. Jeder Punkt einer solchen Linie kann als gemeinschaftlicher Grenzpunkt betrachtet werden.

4. Raumtheile (Körper und unvollständig begrenzte Raumtheile), Flächen und Linien sind „Grössen", weil sie theilbar und ihre Theile den Ganzen gleichartig sind. Da die eigenthümliche Art dieser Grössen als Ausdehnung bezeichnet wird, so werden sie ausgedehnte Grössen genannt. Wegen ihres Zusammenhanges mit dem Weltraume heissen sie Raumgrössen.

E. Müller: Grundvorstell. der Geom. (Braunschweig 1869) S. 33.

5. Da die Fläche als Grenze eines Raumtheiles kein Theil desselben, die Linie als Flächengrenze kein Theil der Fläche sein kann, so ist die Ausdehnung der Fläche beschränkter als die des Raumes, die der Linie beschränkter als die der Fläche. Diese Unterschiede will man ausdrücken, wenn man Linie, Fläche und Raum als Grössen von einer, zwei oder drei Dimensionen bezeichnet.

6. Der Punkt ist untheilbar, also keine Grösse. Man bezeichnet ihn durch einen Buchstaben.

7. Punkt, Linie, Fläche und Körper sind die Raumelemente. Irgend eine Verbindung von Raumelementen wird ein geometrisches Gebilde genannt.

§ 3.

Ruhe und Bewegung der Raumelemente.

1. Da, wo ein Raumelement ruht, ist seine Stelle. Bei einer Bewegung kann es dieselbe verändern.

2. Ein Punkt eines Raumelements wird als fest bezeichnet, wenn er seine Stelle nicht verlässt, während andere Punkte desselben nach andern Stellen rücken. Man sagt alsdann, das Raumelement drehe sich um den festen Punkt.

3. Der Inbegriff aller Stellen, die ein Raumelement bei der Bewegung einnimmt, heisst sein Weg.

Man sagt, ein Raumelement beschreibe einen Weg, wenn letzterer nur eine Dimension mehr hat, als das bewegte Element selbst. Ein Punkt kann also eine Linie, eine Linie eine Fläche, eine Fläche einen Raum (Körper) beschreiben.

4. Die Stelle (1) eines Raumelements, insofern sie in Bezug auf ein anderes Raumelement bestimmt wird, heisst seine Lage.

Wenn von zwei Raumelementen a, b das eine, a, ruht, das andere, b, seine Stelle verlässt, so ändert sich auch die Lage von b gegen a. Wenn aber beide sich bewegen, so hängt es von der Art der Bewegung ab, ob ihre gegenseitige Lage sich ändert oder nicht.

5. Der Weg (3) eines Raumelements wird sein Ort genannt, insofern er in Bezug auf ein anderes Element bestimmt wird, welches ruht.

§ 4.

Gerade und krumme Linien.

1. Eine Linie, welche ihre Lage nicht ändert, während sie sich um zwei ihrer Punkte dreht (§ 3; 2), wird eine gerade Linie (kurzweg Gerade) genannt.

Diese Begriffsbestimmung rührt nach G. W. Krafft (Institut. geom. subl. Tub. 1753. p. 2) von F. C. Maier her; nur dass dieser die Endpunkte als feste Punkte annahm, Vgl. J. W. Camerer: Euclidis Elem. graece et lat. Berolini 1824. I. p. 8. Auch K. F. Gauss bediente sich ihrer (H. B. Lübsen: Elementargeom. Hamburg 1855. S. 11). Vgl. Leibnizens math. Schr. V. S. 185.

Zus. Durch zwei Punkte geht nur eine einzige unbegrenzte Gerade. Alle begrenzten Geraden, die zwei Punkte gemein haben, sind Theile einer unbegrenzten. Eine Gerade wird durch einen oder zwei Buchstaben bezeichnet.

Anmerk. Hieraus ergiebt sich ein einfaches Mittel, die Richtigkeit eines Lineals zu prüfen.

2. Von zwei Geraden heisst eine die Verlängerung der andern, wenn beide auf einer unbegrenzten Geraden liegen und nur einen Punkt gemein haben.

Eine begrenzte Gerade kann stets verlängert werden.

3. Eine vollbegrenzte Gerade (§ 2; 3) heisst eine Strecke. Dieselbe ist durch ihre beiden Grenzpunkte vollständig bestimmt.

Die Strecke zwischen zwei Punkten A und B kann von einem beweglichen Punkte entweder von A nach B oder von B nach A durchlaufen (beschrieben) werden. Im ersten Falle soll die Strecke durch AB, im zweiten durch BA bezeichnet werden. Auf der Strecke AB heisst A der Anfangspunkt, B der Endpunkt. Es ist nun

$$AB + BA = 0; \therefore AB = -BA.$$

4. Eine unbegrenzte Gerade wird durch einen Punkt in zwei halbbegrenzte Gerade getheilt.

5. Eine Linie heisst krumm (eine Curve), wenn drei beliebige Punkte derselben nicht auf einer Geraden liegen. Ein Theil einer krummen Linie wird ein Bogen *(arcus)*, die zwischen den Grenzpunkten eines Bogens liegende Strecke eine Sehne *(chorda)* genannt.

§ 5.

Ebene und krumme Flächen.

1. Eine Fläche, welche ihre Lage nicht ändert, während sie sich so bewegt, dass sie stets drei Gerade enthält, welche durch drei feste nicht auf einer Geraden liegende Punkte gehen, wird eine ebene Fläche (kurzweg Ebene) genannt.

Zus. 1. Durch drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte, oder, durch eine Gerade und einen ausserhalb derselben liegenden Punkt, oder, durch zwei Gerade, die nur einen Punkt gemein haben, geht nur eine unbegrenzte Ebene.

Alle begrenzte Ebenen, die drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte u. s. w. gemein haben, sind Theile derselben unbegrenzten Ebene.

Zus. 2. Eine Gerade liegt in allen ihren Punkten auf einer unbegrenzten Ebene, wenn sie zwei Punkte mit ihr gemein hat.

2. Von zwei Ebenen heisst eine die Erweiterung der andern, wenn beide auf einer unbegrenzten Ebene liegen und nur eine Grenzlinie gemein haben.

Jede begrenzte Ebene kann erweitert werden.

3. Wird der Umfang eines geschlossenen Feldes durch ABC bezeichnet, so erhält das Feld selbst die Bezeichnung $\overline{ABC}$.

4. Eine unbegrenzte Ebene wird durch eine Gerade in zwei *halbbegrenzte Ebenen* getheilt.

5. Eine *Fläche* ist *krumm*, wenn vier beliebige Punkte derselben nicht auf einer Ebene liegen.

Anmerk. In dem weiteren Verlaufe dieser „Elemente" wird stets vorausgesetzt, dass die darin behandelten geometrischen Gebilde auf einer Ebene liegen, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich ausgesprochen ist.

§ 6.

Allgemeine Bestimmung der Lage.

1. Wenn eine $\left\{\begin{matrix}\text{Linie}\\ \text{Fläche}\end{matrix}\right\}$ durch $\left\{\begin{matrix}\text{einen Punkt}\\ \text{eine Linie}\end{matrix}\right\}$ in zwei Theile zerlegt wird (§ 2), so liegt jeder Punkt des einen Theiles entweder auf der einen oder der andern *Seite* der Grenze.

In einer Linie hat jeder Punkt, in einer Fläche jede Linie zwei Seiten.

Zus. Durch zwei Punkte einer Geraden in einer Ebene ist für jeden dritten Punkt der letzteren völlig bestimmt, ob er auf der Geraden, auf der einen oder der andern Seite derselben liegt.

2. An dem Umfange eines geschlossenen Feldes (§ 2; 2) heisst diejenige *Seite* die *innere*, auf welcher das Feld selbst liegt, die andere wird die *äussere Seite* genannt.

3. Eine Linie *trifft* eine andere, mit welcher sie nur einen Punkt gemein hat, wenn dieser Punkt ein Endpunkt der ersteren ist. Zwei Linien, die nur einen Punkt gemein haben, der kein Endpunkt derselben ist, *schneiden* einander, wenn die Theile der einen auf verschiedenen Seiten der andern Linie liegen.

4. Ein Punkt auf einer Linie, in welchem dieselbe in ihrem weiteren Verlaufe sich selbst trifft oder schneidet, heisst ein *Doppelpunkt* oder ein *$n$facher Punkt*, je nachdem die Linie zwei- oder $n$mal durch ihn hindurch geht.

5. Da die Lage einer Geraden durch ihre Bewegung geändert werden kann (§ 3; 4), so haben wir zur Bestimmung dieser Veränderung die Bewegungsarten zu unterscheiden.

Bei der *Bewegung einer unbegrenzten Geraden* in

einer Ebene bleibt entweder ein Punkt fest (§ 3; 2) oder jeder Punkt derselben verlässt seine Stelle. Die Bewegung heisst im ersten Falle eine *Drehung*, im zweiten eine *Verschiebung der Geraden*.

Die Bezeichnung der *Bewegung einer begrenzten Geraden* stimmt mit der Bezeichnung derjenigen unbegrenzten überein, von welcher jene einen Theil bildet. (§ 4; 1. Zus.)

6. Die Gerade AB bewege sich auf der unbegrenzten Geraden g, von welcher sie einen Theil bildet, nach einer Seite (1.) ihres Anfangspunktes (§ 4; 3) A so, dass A nach A', und B nach B' gelangt. — Ist C ein Punkt von AB, so wird derselbe nach C' gelangen, wenn AB die Lage $A'B'$ erreicht, und $AC = A'C'$ ist. Es verlässt also jeder Punkt von AB seine Stelle.

Eine Strecke verschiebt sich auf einer Geraden, wenn sie sich auf derselben nach einer Seite ihres Anfangspunktes bewegt.

Die Strecken AA', BB', welche von dem Anfangs- und dem Endpunkte der verschobenen Strecke AB beschrieben werden, so wie in gleichem Sinne genommene Theile derselben, heissen *gleichgerichtet* oder *von gleicher Richtung*.

Wenn zwei Strecken gleiche Richtung haben, so ist die Verlängerung der einen über ihren Anfangspunkt hinaus der andern Strecke *entgegengesetzt* gerichtet.

Zusatz. Wenn auf einer Geraden der Punkt A zwischen den Punkten B und C liegt, so haben die Strecken BA und AC gleiche, AB und AC entgegengesetzte Richtung.

7. Wenn zwei Gerade a, b in einem Punkte P zusammentreffen, so heisst die Grösse der Drehung der einen Geraden a um den gemeinsamen Endpunkt und in der Ebene beider Geraden, durch welche sie in die Lage der andern Geraden b gelangt, ein *Winkel beider Geraden*. Die Geraden a, b sind die *Schenkel* des Winkels; ihr gemeinsamer Endpunkt P, um den die Drehung erfolgt, wird sein *Scheitel* genannt. Die von dem gedrehten Schenkel beschriebene Fläche heisst die *Winkelfläche*.

v. **Münchow**: Grundlinien d. eb. u. sphär. Trigonometrie (1826) § 11.

Zus. 1. Ein Winkel wird entweder durch einen auf die Winkelfläche, in der Nähe des Scheitels, gesetzten Buchstaben, α, oder mittels seiner beiden Schenkel (a, b), oder endlich durch drei Punkte derselben bezeichnet, unter denen stets der Scheitelpunkt P in die Mitte zu nehmen ist: APB. Dabei kann das Wort „Winkel" durch das Zeichen $\measuredangle$ ersetzt werden. Von dem Schenkel a wird bis zum Schenkel b die Winkelfläche $\overline{ab}$ beschrieben.

Zus. 2. Wenn zwei unbegrenzte Gerade einen Punkt gemein haben, so kann die eine nur durch Drehung in die Lage der andern gebracht werden.

8. Eine und dieselbe Winkelfläche kann durch eine Drehung des einen oder des andern Schenkels, also durch eine Drehung nach rechts oder nach links, beschrieben werden. Zur Verdeutlichung des Drehungssinnes stellt man in der Winkelbezeichnung den Schenkel voran, von welchem die Drehung ausgeht. Wenn nun der Schenkel a zuerst den Winkel (a, b) beschreibt und dann über dieselbe Winkelfläche um den Winkel (b, a) zurückgeht, so hebt seine zweite Drehung die erste vollständig auf. Betrachtet man daher den Winkel (a, b) als positiv, so ist (b, a) negativ, mithin

$$(a, b) + (b, a) = 0$$
$$\therefore (a, b) = -(b, a).$$

9. Zwei Gerade, die einen Endpunkt gemein haben, bilden zwei Winkel mit einander, von denen der eine der Aussenwinkel des andern heisst.

v. Münchow; Trig. § 13.

10. Wird eine Gerade um einen Grenzpunkt in einem Sinne so weit gedreht, bis sie in ihre ursprüngliche Lage zurückgekehrt ist, so hat sie eine Umdrehung gemacht; die derselben entsprechende Drehungsgrösse wird ein Vollwinkel genannt. Der Aussenwinkel eines Vollwinkels hat den Werth null und heisst deshalb ein Nullwinkel.

Zus. 1. Alle Vollwinkel sind einander gleich.

Zus. 2. Jeder Winkel wird durch seinen Aussenwinkel zu einem Vollwinkel ergänzt.

J. H. T. Müller: Geometrie (1844). I. S. 12.

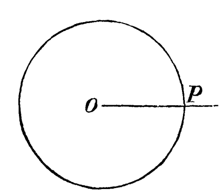
11. Ein Winkel heisst hohl (concav), gestreckt (flach)

oder erhaben (convex), je nachdem er kleiner, so gross oder grösser als sein Aussenwinkel ist.

Die beiden Schenkel eines gestreckten Winkels bilden eine Gerade, diesem Winkel entspricht mithin eine halbe Umdrehung. Ein hohler Winkel kann durch $\sphericalangle\ (\widehat{a, b})$, ein erhabener durch $\sphericalangle\ (\widecheck{a, b})$ bezeichnet werden.

Zus. Alle gestreckten Winkel sind einander gleich.

B. F. Thibaut: Grundr. d. reinen Math. (1831) S. 195.



12. Wenn eine Gerade um ihren Anfangspunkt O eine Umdrehung macht, so beschreibt ein Punkt P derselben einen Kreis. Der Punkt O heisst der Mittelpunkt (Centrum), die Strecke OP der Halbmesser oder Radius des Kreises. Eine durch den Mittelpunkt gehende Gerade, welche zwei Punkte des Kreises verbindet, wird ein Durchmesser (Diameter) genannt.

Zus. 1. Alle Halbmesser und alle Durchmesser eines Kreises sind einander gleich.

Zus. 2. Ein Punkt liegt innerhalb oder ausserhalb eines Kreises, oder auf dem Kreise, je nachdem die Strecke zwischen ihm und dem Mittelpunkte kleiner, grösser oder so gross wie der Halbmesser ist; und umgekehrt.

Zweites Hauptstück:

Die Gliederung der Gebilde.

A. nach den Seitenlinien und Ecken.

§ 7.

Uebersicht derselben.

1. n Punkte einer Geraden bilden mit sämmtlichen zwischen ihnen liegenden Strecken eine vollständige Punktreihe zu n. Verbindet man n Punkte einer Geraden so durch Strecken, dass jeder Punkt den Endpunkt einer und den Anfangspunkt einer zweiten Strecke bildet, so entsteht eine Punktreihe zu n.

2. Verbindet man von mehreren Punkten einer Ebene, unter denen nicht drei auf einander folgende auf einer Geraden liegen, jeden mit dem folgenden durch eine Strecke, so dass jeder Punkt als der Endpunkt einer und der Anfangspunkt einer andern Strecke erscheint, so entsteht eine gebrochene Linie. Jede Strecke derselben heisst eine Bruchstrecke und je zwei auf einander folgende Bruchstrecken haben einen Brechungspunkt gemein. Zwischen drei Bruchstrecken liegen zwei, zwischen n Bruchstrecken $n - 1$ Brechungspunkte.

Fällt der Endpunkt der letzten mit dem Anfangspunkte der ersten Bruchstrecke zusammen, so läuft die gebrochene Linie in sich zurück (§ 2; 3). Eine in sich zurücklaufende gebrochene Linie mit n Bruchstrecken und n Brechungspunkten heisst ein $n$eck. Die Bruchstrecken desselben werden Seitenstrecken, die Brechungspunkte Ecken genannt. Eine Seitenstrecke, welche man über die sie begrenzenden Ecken hinaus verlängert, bezeichnet man als Seitenlinie.

3. n Gerade, unter denen jede von allen übrigen geschnitten wird, bilden ein vollständiges $n$seit, dessen Seitenlinien die Geraden heissen. Jede Seitenlinie enthält $n - 1$ Durchschnitte, Ecken, das ganze $n$seit also, da jede Ecke auf zwei Seitenlinien liegt, $\frac{n(n-1)}{2}$ Ecken.

Zus. Ein vollständiges Dreiseit hat 3, ein vollständiges Vierseit 6, ein vollständiges Fünfseit 10 Ecken.

4. n Punkte, unter denen nicht mehr als je zwei auf einer Geraden liegen, bilden mit ihren sämmtlichen geraden Verbindungslinien ein vollständiges $n$eck, in welchem die n Punkte Ecken, ihre Verbindungslinien Seitenstrecken genannt werden.

Von jeder Ecke desselben gehen $n - 1$, von allen n Ecken also, da jede Seitenstrecke zwei Ecken enthält, $\frac{n(n-1)}{2}$ Seitenstrecken.

Zus. Ein vollständiges Dreieck hat 3, ein vollständiges Viereck 6, ein vollständiges Fünfeck 10 Seitenstrecken.

Anmerk. L. N. M. Carnot (Géom. de pos. 1803. 103) unterschied die „vollständigen" Gebilde von den $n$ecken. J. Steiner sonderte das „vollständige $n$eck" von dem „vollständigen $n$seite" (System. Entw. 1832. 19).



5. Die mit den Seitenlinien nicht zusammenfallenden Strecken zwischen den Ecken der $n$ecke und vollständigen $n$seite werden Diagonalen, die mit den Ecken nicht zusammenfallenden Durchschnittspunkte der Seitenlinien in den $n$ecken und vollständigen $n$ecken Nebenecken genannt.

Zus. 1. Das $n$eck hat $\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$ Diagonalen und Nebenecken.

Lexell: Novi Comment. Ac. Petr. 19. S. 231.

Zus. 2. In zwei Seitenlinien eines vollständigen $n$seits liegen $2n-3$ Ecken. Von der gemeinsamen Ecke aus können also $\frac{n(n-1)}{2} - (2n-3) = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$, mithin von allen $\frac{n(n-1)}{2}$ Ecken, die zu je 2 auf einer Diagonale liegen, $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$ Diagonalen gezogen werden.

Zus. 3. In einem vollständigen $n$ecke gehen durch 2 Ecken $2n-3$ Seitenlinien. Eine durch beide Ecken laufende Seitenlinie kann also mit den übrigen $\frac{n(n-1)}{2} - (2n-3) = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$ Nebenecken bilden. Ein vollständiges $n$eck hat also $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$ Nebenecken.

§ 8.

Die Punktreihe.

1. Durch drei Punkte A, B, C einer Geraden sind drei Strecken AB, AC, BC begrenzt. Jede derselben hat mit den beiden andern je einen Grenzpunkt gemein. Nun ist

$$AB + BC + CA = 0$$
$$\therefore AC = AB + BC;$$
$$AB = AC + CB = AC - BC = CB - CA.$$

A. F. Möbius: Barycentr. Calcul (1827) § 1.

2. Für vier Punkte A, B, C, D einer Geraden ist

$$\left.\begin{array}{l} AB + BC + CA = 0, \\ CD + DA + AC = 0; \end{array}\right\} (1.)$$
$$\therefore AB + BC + CD + DA = 0.$$



Zus. Die Summe der Strecken einer durch n Punkte bestimmten Punktreihe ist null.

3. Jeder einzelne unter n Punkten einer Geraden ist der gemeinschaftliche Grenzpunkt von $n - 1$ Strecken. Zwischen allen n Punkten liegen mithin, da jede Strecke zwei Grenzpunkte hat, $\frac{n(n-1)}{2}$ Strecken.

§ 9.

Das n eck.

1. Von einem Punkte A eines n ecks aus kann man nach einem zweiten Punkte B desselben in dem Linienzuge selbst auf zwei Wegen gelangen. Durch einen dritten Punkt C des n ecks wird aber der Weg von A nach B bestimmbar. Er ist entweder im Sinne der Bezeichnung ABC oder der Bezeichnung ACB zurückgelegt. Für dasselbe Dreieck ist

$$ABC = BCA = CAB,$$

aber $$ABC + ACB = 0; \; BCA + BAC = 0.$$

2. Unter den $2n$ Elementen — Seitenstrecken und Ecken — eines n ecks heisst das $(n+1)$te dem ersten, das $(n+2)$te dem zweiten u. s. w. „gegenüber liegend.“ Ist n eine gerade Zahl, so liegen gleichnamige Elemente einander gegenüber; wenn aber n ungerade ist, so sind die gegenüber liegenden Elemente ungleichnamig.

Im Dreiecke liegt eine Ecke einer Seitenstrecke gegenüber, im Vierecke hingegen eine Ecke einer Ecke, eine Seitenstrecke einer Seitenstrecke.

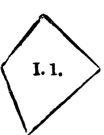
v. Staudt: Geometrie der Lage (1847). 79.

3. Ein Punkt auf der Seitenstrecke eines n ecks heisst ein Doppelpunkt, ein drei- oder n facher Punkt, je nachdem das Liniengebilde zwei-, drei- oder n mal durch ihn hindurch geht (§ 6; 4).

Ein n eck heisst einfach, wenn es keinen mehrfachen Punkt hat. Ein einfaches n eck bildet den Umfang eines geschlossenen Feldes und besitzt eine innere und eine äussere Seite. — In einem einfachen n ecke wird eine Ecke einspringend oder ausspringend genannt, je nachdem die über die Ecke hinaus verlängerten Seitenstrecken in das vollbegrenzte Feld eintreten oder nicht.

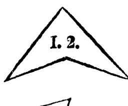


Die Vierecke z. B. sind

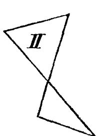


I. einfach, d. i. ohne Doppelpunkte, und zwar

1. ohne einspringende Ecken,



2. mit einer einspringenden Ecke versehen.



II. überschlagen, d. i. mit einem Doppelpunkte versehen.

4. Ein Viereck kann durch eine Diagonale in zwei Dreiecke, ein Fünfeck durch zwei Diagonalen in drei Dreiecke, ein $n$eck durch $n-3$ Diagonalen, die einander nicht schneiden, in $n-2$ Dreiecke zerlegt werden.

5. Ein Viereck oder Fünfeck mit einem Doppelpunkte umschliesst zwei, ein $n$eck mit p Doppelpunkten $p+1$ geschlossene Felder.

6. Liegen alle Ecken eines $n$ecks auf den Seitenlinien eines andern, so heisst ersteres dem letzteren eingeschrieben, dieses jenem umgeschrieben.

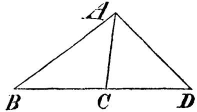
7. Die Dreiecksfläche, welche von einer Geraden AB beschrieben wird, welche sich um den festen Punkt A dreht und zugleich die Strecke BC in der Richtung von B nach C durchläuft, soll durch $\overline{ABC}$ bezeichnet werden. Dieselbe Fläche kann in gleicher Bedeutung auch $\overline{BCA}$ und $\overline{CAB}$ bezeichnet werden, so dass $\overline{ABC} = \overline{BCA} = \overline{CAB}$ ist. Ebenso hat man

$$\overline{ACB} = \overline{CBA} = \overline{BAC},$$

aber $$\overline{ABC} + \overline{ACB} = 0; \therefore \overline{ABC} = -\overline{ACB}.$$

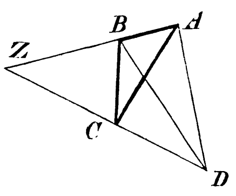
Zus. Die Fläche eines $n$ecks $ABCDE$.. wird durch $\overline{ABCDE..}$ bezeichnet.

8. Es seien B, C, D drei Punkte einer Geraden, A ein Punkt ausserhalb derselben. — Alsdann ist $BC + CD + DA = 0$ (§ 8; 1), also auch



$$\overline{ABC} + \overline{ACD} + \overline{ADB} = 0,$$

$$\therefore \overline{ABC} + \overline{ACD} = \overline{ABD}.$$



9. Ist $ABCD$ ein Viereck, dessen Seitenlinien AB und DC in Z zusammentreffen, so hat man, da Z, C und D auf einer Geraden liegen (8.):

$$\overline{AZC} + \overline{ACD} + \overline{ADZ} = 0,$$
$$\overline{BZC} + \overline{BCD} + \overline{BDZ} = 0;$$

und, weil Z, B und A auf einer Geraden liegen:

$$\overline{DZB} + \overline{DBA} + \overline{DAZ} = 0,$$
$$\overline{CZB} + \overline{CBA} + \overline{CAZ} = 0.$$

Subtrahirt man die zweite und vierte Gleichung von der Summe aus der ersten und dritten, so erhält man leicht:

$$\overline{ABC} = \overline{DAB} + \overline{DBC} + \overline{DCA}.$$

Möbius: a. a. O. § 17. 18.

10. Ist $ABCD$ ein beliebiges Viereck, und man nimmt irgendwo in der Ebene zwei Punkte P und Q an, so ist (9.):

$$\overline{PAB} = \overline{QPA} + \overline{QAB} + \overline{QBP},$$
$$\overline{PBC} = \overline{QPB} + \overline{QBC} + \overline{QCP},$$
$$\overline{PCD} = \overline{QPC} + \overline{QCD} + \overline{QDP},$$
$$\overline{PDA} = \overline{QPD} + \overline{QDA} + \overline{QAP}.$$

Die Summe dieser vier Gleichungen ist

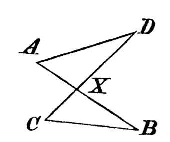
$$\overline{ABCD} = \overline{QAB} + \overline{QBC} + \overline{QCD} + \overline{QDA}$$
$$= \overline{PAB} + \overline{PBC} + \overline{PCD} + \overline{PDA}.$$

Da hiernach die Lage der Hülfspunkte P und Q für die Flächenbestimmung des Vierecks ohne Einfluss ist, so hat man den Satz:

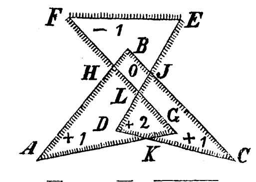
Die Fläche eines $n$ecks ist der Summe derjenigen Dreiecksflächen gleich, welche eine Gerade von veränderlicher Grösse beschreibt, deren einer Grenzpunkt ein beliebiger fester Punkt ist und deren anderer Grenzpunkt den Umfang des $n$ecks durchläuft.

A. F. Möbius: Barycentr. Calcul § 165. Anmerk.

Zus. 1. Für das überschlagene Viereck mit dem Doppelpunkte X erhält man



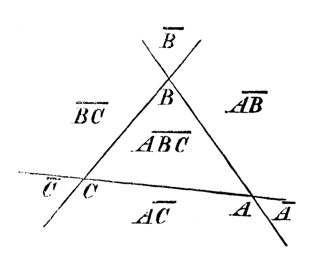
$$\overline{ABCD} = \overline{XDA} + \overline{XBC}$$
$$= \overline{XDA} - \overline{XCB}.$$



Zus. 2. Es ist $\overline{ABCDEFG} = \overline{ABC} + \overline{ACD} + \overline{ADE} + \overline{AEF} + \overline{AFG}$. Setzt man $AHLDK = \alpha$, $DLGK = \beta$, $CKGLJ = \gamma$, $BJLH = \delta$, $EJBHF = \varepsilon$, $AFH = \zeta$, $AKC = \eta$, so ist $\overline{ABC} = \overline{\alpha} + \overline{\beta} + \overline{\gamma} + \overline{\delta} + \overline{\eta}$; $\overline{ACD} + \overline{ADE} + \overline{AEF} = -(\overline{\eta} + \overline{\alpha} + \overline{\delta} + \overline{\varepsilon} + \overline{\zeta})$; $\overline{AFG} = \overline{\zeta} + \overline{\alpha} + \overline{\beta} \therefore \overline{ABCDEFG} = \overline{\alpha} + 2\overline{\beta} + \overline{\gamma} - \varepsilon$. Die Coëfficienten der einzelnen Felder findet man, wenn man aus der Umgebung der Figur zu jedem Felde stetig fortschreitet und dabei jeden Uebergang von der äusseren zur inneren Seite durch $+ 1$, jeden von der inneren zur äusseren durch $- 1$ ausdrückt.

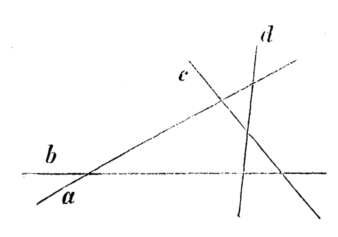
§ 10.

Das vollständige *n* seit.



1. Durch eine Gerade wird die Ebene in zwei Felder getheilt. Zwei Gerade, welche einander in C schneiden, zerlegen die Ebene in vier offene Felder. Eine dritte Gerade, welche die beiden ersten in B und A schneidet, theilt drei der vorhandenen Felder in je zwei Stücke. Ein vollständiges Dreiseit zerlegt mithin die Ebene in $2 + 2 + 3 = 7$ Felder, die nach der Anzahl der in ihren Grenzen liegenden Ecken als eineckige $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, zweieckige $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ und dreieckige $\overline{ABC}$ bezeichnet werden können.

Möbius: a. a. O. § 32.



2. In einem vollständigen Vierseite ($abcd$) theilt eine Seitenlinie vier von den durch die drei übrigen bestimmten Feldern in je zwei Theile. Das Gebilde zerlegt demnach die Ebene in $7 + 4 = 11$ Felder, unter denen drei geschlossen sind.

Nennen wir nun in einem *n* seit eine Seitenlinie eine innere oder äussere, je nachdem sie eine von den übrigen

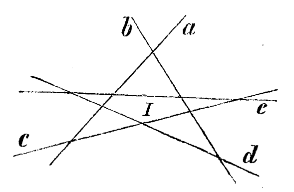
begrenzte Strecke schneidet oder nicht, so hat das vollständige Vierseit zwei innere und zwei äussere Seitenlinien.

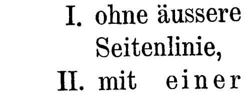
Das vollständige Vierseit (*abcd*) enthält drei Vierecke:

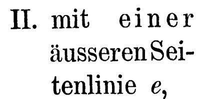
abcd, acdb, adbc.

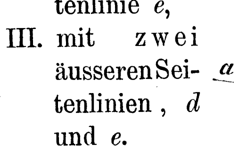
3. Ein vollständiges Fünfseit (*abcde*) theilt die Ebene in $1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 1 + \frac{6.\,5}{2} = 16$ Felder, unter denen $1 + 2 + 3 = \frac{4.\,3}{2} = 6$ geschlossen sind.

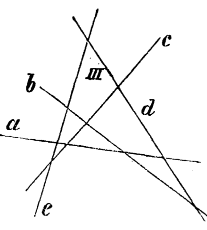
Ein vollständiges Fünfseit (*abcde*) kann in drei Formen auftreten:

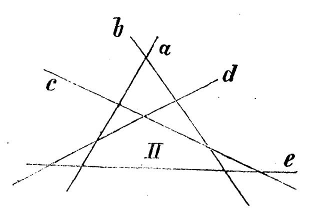



I. ohne äussere Seitenlinie,


II. mit einer äusseren Seitenlinie *e*,


III. mit zwei äusseren Seitenlinien, *d* und *e*.





Jedes vollständige Fünfseit (*abcde*) enthält $4.\,3 = 12$ Fünfecke. Denn, wenn man von der Geraden *a* ausgeht, so können vier Linien in die zweite Stelle treten, in jeder Verbindung zu zweien drei in die dritte, und in jeder Verbindung zu drei zwei in die vierte Stelle. Unter diesen 24 Folgen stellen je zwei dasselbe Fünfeck dar, welche durch Vertauschung der Linien an der zweiten und fünften, so wie der dritten und vierten Stelle aus einander abzuleiten sind z. B. *abcde* und *aedcb*. Die 12 in (*abcde*) enthaltenen Fünfecke sind:

abcde abdec acbde acebd
abced abecd acbed adbce
abdce abedc acdbe adcbe.

4. Wird ein vollständiges $(n - 1)$seit von einer Geraden in $n - 1$ Punkten geschnitten, so werden von den vorhandenen Feldern n in je 2 Theile zerlegt, so dass n neue hinzukommen. Auf der $n$ten Geraden liegen $n - 2$ Strecken, welche eben so viele geschlossene Felder begrenzen. Ein vollständiges $n$seit zer-

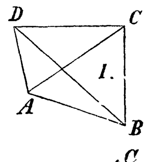
legt also die Ebene in $1 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ Felder, unter denen $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ geschlossen sind. Es enthält ferner $3.4.5 \ldots (n-1) = \frac{1}{2}(n-1)!$ $n$ecke.

Carnot: Géom. de pos. (1803). 103.

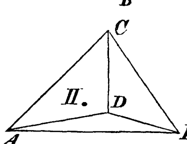
§ 11.

Das vollständige *n* eck.

1. In Betreff der Lage der Ecken eines vollständigen Vierecks (*ABCD*) sind zwei Fälle zu unterscheiden:



I. Jede Ecke liegt ausserhalb des Dreiecks zwischen den drei übrigen;



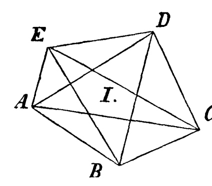
II. eine Ecke liegt innerhalb des durch die drei übrigen bestimmten Dreiecks.

Nennt man eine Ecke eines vollständigen *n*ecks eine innere oder äussere, je nachdem sie von den Verbindungslinien der übrigen Ecken eingeschlossen wird oder nicht, so hat ein vollständiges Viereck entweder keine oder eine innere Ecke.

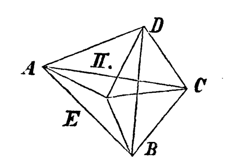
Jedes vollständige Viereck (*ABCD*) enthält drei Vierecke:

ABCD, *ACDB*, *ADBC*.

Möbius: a. a. O. § 32.

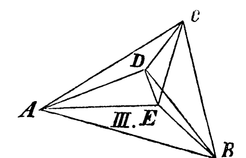


2. Die Lage der Ecken eines vollständigen Fünfecks (*ABCDE*) umfasst drei Fälle:



I. Jeder Eckpunkt liegt ausserhalb des von den vier übrigen gebildeten Vierecks;

II. eine Ecke, E, liegt innerhalb des von den übrigen bestimmten Vierecks;



III. zwei Ecken, D und E, liegen innerhalb des von den übrigen bestimmten vollständigen Vierecks.

Ein vollständiges Fünfeck hat also entweder keine, oder eine, oder zwei innere Ecken.

Von einer bestimmten Ecke des Gebildes kann man auf vier Ecken übergehen; von jeder Verbindung zu zweien auf 3 Ecken an dritter Stelle; von je 3 auf 2 Ecken an vierter Stelle. Unter diesen $4 . 3 . 2 = 24$ Folgen stellen je 2 dasselbe Fünfeck dar, welche durch Vertauschung der Ecken zweiter und fünfter, sowie der dritter und vierter Stelle aus einander ableitbar sind. Die in einem vollständigen Fünfecke ($ABCDE$) enthaltenen $4.3 = 12$ Fünfecke sind:

$ABCDE$	$ABDEC$	$ACBDE$	$ACEBD$
$ABCED$	$ABECD$	$ACBED$	$ADBCE$
$ABDCE$	$ABEDC$	$ACDBE$	$ADCBE$.

3. Ein vollständiges $n$eck enthält $(n-1)(n-2)..3 = \frac{(n-1)!}{2}$ $n$ecke.

B. nach den Winkeln.

§ 12.

Die Winkel mit gemeinschaftlichem Scheitel.

1. Zwei Winkel, welche den Scheitel und einen Schenkel gemein haben, heissen anstossende, und zwar gleichseitig oder ungleichseitig anstossende, je nachdem sie auf derselben oder auf verschiedenen Seiten des gemeinschaftlichen Schenkels liegen.

2. Zwei ungleichseitig anstossende Winkel, deren nicht gemeinschaftliche Schenkel auf einer Geraden liegen, werden Nebenwinkel genannt.

Die Summe zweier Nebenwinkel ist ein gestreckter Winkel (§ 6; 11.).

3. Sind zwei Nebenwinkel cinander gleich, so wird jeder von ihnen ein „rechter Winkel“ genannt und durch R bezeichnet; sind sie ungleich, so heissen sie „schiefe Winkel“, und zwar der kleinere „spitz“, der grössere „stumpf.“ Ein rechter Winkel ist also grösser als ein spitzer und kleiner als ein stumpfer.

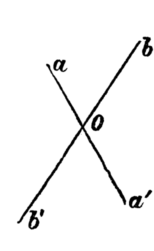
Man sagt, der gemeinschaftliche Schenkel zweier Nebenwinkel stehe auf der Geraden, welche die andern Schenkel enthält, „senkrecht“ oder „schief“, je nachdem die Nebenwinkel gleich oder ungleich sind. Der Scheitel heisst der „Fusspunkt“ der senkrechten oder schiefen Geraden. „a steht senkrecht auf b“ wird bezeichnet: $a \perp b$.

Zus. 1. Ein Vollwinkel (§ 6; 10.) ist vier rechten gleich.

Zus. 2. Die Halbirungslinien zweier Nebenwinkel stehen senkrecht auf einander.

4. Zwei Winkel heissen Supplementwinkel oder Complementwinkel, je nachdem ihre Summe einen gestreckten oder einen rechten Winkel beträgt.

5. Zwei Winkel, die nur den Scheitel gemein haben und bei denen jeder Schenkel des einen Winkels die Verlängerung eines Schenkels des andern über den Scheitel hinaus bildet, werden Scheitelwinkel genannt.



6. Es seien (a, b) und (a', b') Scheitelwinkel mit dem Scheitel O so, dass a und a' so wie b und b' eine Gerade bilden. — Dreht man die Gerade, auf welcher a und a' liegen um O so weit, bis a mit b zusammenfällt, so muss gleichzeitig a' auch b' decken (§ 4; 1. Zus.). Die durch dieselbe Drehung beschriebenen Winkel (a, b) und (a', b') sind einander gleich.

Anderer Beweis: $(a, b) + (b, a') = (b, a') + (a' b')$
$\therefore (a, b) = (a', b')$.

Zwei Scheitelwinkel sind einander gleich.

Eukl. I; 15.

Anmerk. Eudemos, der im vierten Jahrhunderte v. Chr., kurz vor Euklid, eine Geschichte der Geometrie schrieb, erzählt darin, dass Thales (gest. 548 v. Chr.) den vorstehenden Lehrsatz entdeckt habe. Proklos: Baroc. (Patavii 1560) p. 171.



7. Bei drei Halbstrahlen a, b, c hat man innerhalb eines Vollwinkels

$$(a, b) + (b, c) = (a, c)$$
$$\therefore (b, c) = (a, c) - (a, b).$$

Die Winkel zwischen vier und mehr Halbstrahlen lassen sich auf ähnliche Weise zu Gleichungen verbinden.

8. Ein Vollwinkel wird in 360 gleiche Theile, Grade (360^0), ein Grad in 60 Minuten ($60'$), eine Minute in 60 Sekunden ($60''$) eingetheilt.

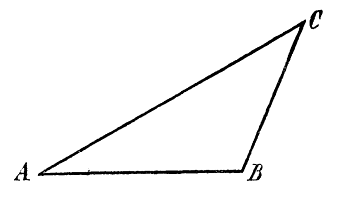
Ein gestreckter Winkel enthält also 180^0, ein rechter 90^0.

Anmerk. Die Theilung des Vollwinkels findet sich zuerst in der Σύνταξις μαθημαθική (mehr bekannt unter dem arabischen Titel „Almagest") des Claudius Ptolemäus, welcher von 125—141 n. Chr. zu Alexandrien in Aegypten sich mit astronomischen Beobachtungen beschäftigte.

§ 13.

Die Winkel bei drei Geraden.

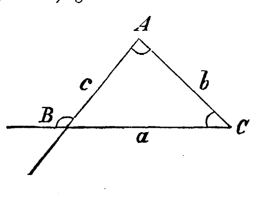
1. Wenn drei Gerade einander in drei Punkten A, B, C schneiden, so heissen die von den drei Seitenstrecken AB, BC, CA gebildeten Winkel Dreieckswinkel oder Aussenwinkel des Dreiecks, je nachdem sie concav oder convex sind.



Verbindet man mit der Bezeichnung ABC eines Dreiecks die Auffassung desselben, dass seine Strecken in der Richtung AB, BC, CA von dem beweglichen Punkte einer Geraden durchlaufen werden, welche sich um einen Punkt innerhalb des Dreiecks dreht, so sind die in dem nämlichen Drehungssinne beschriebenen Dreieckswinkel: ACB, CBA, BAC, die Aussenwinkel: ABC, BCA, CAB.

A. F. Möbius: Kreisverwandtschaft (Leipzig 1855) § 8.

2. Wenn drei Gerade a, b, c einander in C, A, B schneiden, so lässt sich die Gerade a auf zwei Wegen durch Rechtsdrehung um die Ecken in die Lage von c bringen:



erstens, indem man sie um B dreht;

zweitens, indem man sie erst um C bis zum Zusammenfallen mit b und dann um A dreht, bis sie mit c zusammenfällt. Es ist daher im Sinne der Rechtsdrehung

$$(a, c) = (a, b) + (b, c).$$

Die Summe zweier Dreieckswinkel ist dem Nebenwinkel des dritten gleich.

Eukl. I; 32.

Zus. 1. $(a, c) + (c, a) = (a, b) + (b, c) + (c, a) = 2R.$

Die Summe der drei Winkel eines Dreiecks beträgt zwei rechte oder einen gestreckten Winkel.

Eukl. I; 32.

Anmerk. Eudemos schreibt die Erfindung dieses Satzes den Pythagoreern zu und giebt den Gang ihres Beweises an, welcher, wie der des Euklides, die Parallelen zu Hülfe nimmt. — Proklos: Baroc. p. 228.

Zus. 2. Von den Winkeln eines Dreiecks sind 2 stets spitz, nur einer kann recht oder stumpf sein.

Ein Dreieck heisst recht- oder stumpfwinklig, je nachdem ein Winkel desselben recht oder stumpf ist; es wird spitzwinklig genannt, wenn alle drei Winkel spitz sind.

Von den Seitenstrecken eines rechtwinkligen Dreiecks heisst die dem rechten Winkel gegenüber liegende die Hypotenuse, die beiden andern werden Katheten genannt.

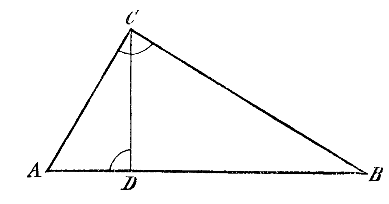
Zus. 3. Von einem Punkte ausserhalb lässt sich auf eine Gerade nur eine Senkrechte fällen.

Proklos: Baroc. p. 179.

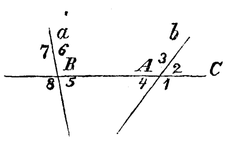
3. Wenn zwei Dreiecke zwei Winkel, einzeln oder zusammengenommen, gleich haben, so sind auch ihre dritten Winkel einander gleich. (2)

Clavius zu Eukl. I; 32.

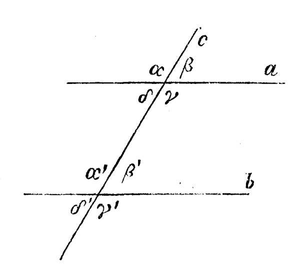
Zus. 1. Wenn in einem Dreiecke zwei Winkel einander gleich sind, so steht die Halbirungslinie des dritten auf der ihm gegenüber liegenden Seitenstrecke senkrecht.



Zus. 2. Schneidet man in dem rechtwinkligen Dreiecke ABC von dem rechten Winkel BCA durch CD einen Theil $DCB = DAC$ ab, so ist $CD \perp AB$.



4. Wenn zwei Gerade a, b von einer dritten c in B und A geschnitten werden, so entstehen acht ungetheilte Winkel. Von diesen sollen je zwei an verschiedenen Scheiteln liegende gleichwendige oder gegenwendige Winkel heissen, je nachdem sie durch Drehungen der Schneidenden c in gleichem oder entgegengesetztem Sinne entstehen. (In der Figur sind je zwei durch zwei gerade oder zwei ungerade Zahlen bezeichnete Winkel gleichwendig; von zwei gegenwendigen trägt der eine eine gerade der andere eine ungerade Zahl.) Gleich- und gegenwendige Winkel sind entweder gleichseitig oder ungleichseitig, d. h. auf einer Seite oder auf verschiedenen Seiten der Schneidenden befindlich.



5. Die Geraden a und b werden in zwei Punkten von c geschnitten, so dass an dem einen Durchschnitte die Winkel α, β, γ, δ, an dem andern die Winkel α', β', γ', δ' liegen und die mit gleichen Buchstaben bezeichneten gleichseitig gleichwendig sind. Es sei nun

I. $\alpha = \alpha'$. — Dann ist

$\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$ (§ 6; 11. Zus.); $\quad \alpha + \delta = 2R$

$\alpha = \alpha' \qquad\qquad \alpha' = \alpha$

$\therefore \beta = \beta'. \qquad\qquad \therefore \alpha' + \delta = 2R$

$\beta = \delta'$ u. s. w. $\qquad \alpha' + \beta = 2R$. u. s. w.

Wenn zwei Gerade von einer dritten so geschnitten werden, dass zwei gleichwendige Winkel einander gleich sind, so gilt dies auch von den übrigen gleichwendigen Winkeln und je zwei gegenwendige betragen zusammen zwei Rechte.

II. $\alpha + \beta' = 2R$. — Dann ist

$\alpha + \beta + \alpha' + \beta' = 4R; \qquad \alpha' + \beta' = 2R$

$\alpha + \beta' = 2R; \qquad 2R = \alpha + \beta'$

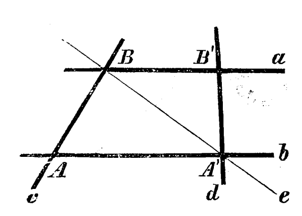
$\therefore \beta + \alpha' = 2R. \qquad \therefore \alpha = \alpha';$

$\gamma + \beta' = 2R$ u. s. w. $\qquad \beta = \beta'$ u. s. w.

Wenn zwei Gerade von einer dritten so geschnitten werden, dass zwei gegenwendige Winkel zu-

sammen zwei Rechte betragen, so gilt dies auch von den übrigen gegenwendigen Winkeln und je zwei gleichwendige sind einander gleich.

J. H. van Swinden: Geom. 23—26.

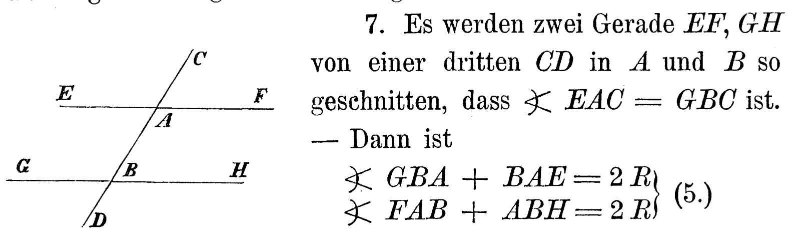


6. Zwei Gerade a, b werden von einer dritten c in B und A, von einer vierten d in B' und A' geschnitten, und es bilde c mit a und b gleiche gleichwendige Winkel. — Zieht man durch B und A' die Gerade e, so ist im Sinne der Rechtsdrehung

$$(c, a) = (c, b);$$
$$(c, e) = (c, b) + (b, e) \ (2).$$
$$(c, e) = (c, a) + (a, e)$$
$$\therefore (a, e) = (b, e);$$
$$(a, d) = (a, e) + (e, d),$$
$$(a, d) = (b, e) + (e, d) = (b, d).$$

Es werden also a und b auch von d unter gleichen gleichwendigen Winkeln $(a, d) = (b, d)$ geschnitten.

Wenn zwei Gerade von einer dritten unter gleichen gleichwendigen Winkeln geschnitten werden, so bilden sie mit jeder beliebigen schneidenden Geraden gleiche gleichwendige Winkel.



7. Es werden zwei Gerade EF, GH von einer dritten CD in A und B so geschnitten, dass $\sphericalangle\, EAC = GBC$ ist. — Dann ist

$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle\, GBA + BAE = 2\,R\\ \sphericalangle\, FAB + ABH = 2\,R\end{array}\right\} (5.)$$

Die Geschnittenen EF und GH können also einander weder auf der einen noch auf der andern Seite von CD einen Punkt gemein haben, weil sonst der gemeinsame Punkt mit A und B ein Dreieck bilden würde, was (nach 2.) unmöglich ist.

Zwei Gerade einer Ebene, welche niemals zusammen treffen, wie weit man sie auch verlängern möge, heissen parallel oder gleichlaufend. „a ist b parallel" wird bezeichnet: $a \parallel b$.

Zwei Gerade sind parallel, wenn sie von einer dritten unter gleichen gleichwendigen Winkeln geschnitten werden.

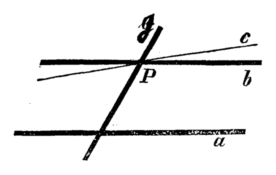
Eukl. I; 27.

Zus. Zwei Gerade sind parallel, wenn sie von einer dritten so geschnitten werden, dass die Summe zweier gegenwendigen Winkel zwei Rechte beträgt.

Eukl. I; 28.

8. Da zwei parallele Gerade keinen Punkt gemein haben, so kann die eine derselben nicht durch Drehung in die Lage der andern gebracht werden (§ 6; 5); sie bilden also auch keinen Winkel mit einander (§ 6; 7). Von zwei parallelen Geraden muss hingegen jeder Punkt der einen seine Stelle verlassen, wenn diese in die Lage der andern gelangen soll, und dies wird nur durch Verschiebung bewirkt (§ 6; 5).

Von zwei parallelen Geraden kann die eine durch Verschiebung allein in die Lage der andern gebracht werden.



9. Wenn die Geraden a und b von g unter gleichen gleichwendigen Winkeln geschnitten werden, so ist $a \parallel b$ (7.), mithin kann a durch Verschiebung allein in die Lage von b übergehen (8.). Geht nun durch P, den Durchschnitt von b und g, irgend eine andere Gerade c, so kann b nur durch Drehung in die Lage von c gebracht werden, weil beide Linien den Punkt P gemein haben (§ 6; 7. Zus. 2). Es kann also auch a nicht ohne Drehung in die Lage von c rücken, mithin sind a und c nicht parallel (8.). Von allen durch P gehenden Geraden ist also nur diejenige a parallel, welche mit a von g unter gleichen gleichwendigen Winkeln geschnitten wird.

Zwei parallele Gerade werden von einer dritten unter gleichen gleichwendigen Winkeln geschnitten.

Zus. 1. Zwei parallele Gerade werden von einer dritten so geschnitten, dass die Summe zweier gegenwendigen Winkel zwei Rechte beträgt (5.).

Eukl. I; 29.

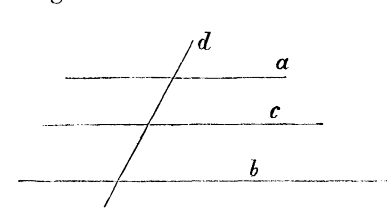
Zus. 2. Durch einen Punkt geht nur eine Gerade, welche einer gegebenen Geraden parallel ist.

10. Wird von zwei parallelen Geraden a, b die eine a von einer dritten Geraden c geschnitten, so wird auch die andere b von ihr geschnitten.

Denn, würde b von c nicht geschnitten, so wäre $b \parallel c$. Dies ist aber unmöglich (9. Zus. 2.).

Proklos: Baroc. p. 223.

Zus. Zwei Gerade schneiden einander, wenn sie von einer dritten in zwei Punkten so geschnitten werden, dass zwei gleichwendige Winkel ungleich sind oder die Summe zweier gegenwendigen Winkel nicht zwei Rechte beträgt.



11. Von drei Geraden a, b, c sei $a \parallel c$ und $b \parallel c$. — Schneidet man c durch eine vierte Gerade d, so werden a und b ebenfalls von d geschnitten (10.) und es ist

$$(d,\ a) = (d,\ c);\ (d,\ b) = (d,\ c);\ (9.)$$
$$\therefore\ (d,\ a) = (d,\ b);\ a \parallel b\ (7.).$$

Zwei Gerade sind parallel, wenn jede von ihnen derselben dritten Geraden parallel ist.

Eukl. I; 30.

12. Zwei parallele Gerade haben gleiche oder entgegengesetzte Richtung, je nachdem sie auf derselben oder auf verschiedenen Seiten der Geraden liegen, welche ihre Anfangspunkte verbindet. Man bezeichnet sie als „gleichgerichtet parallel“ (|_|) und „entgegengesetzt parallel“ (|/|).

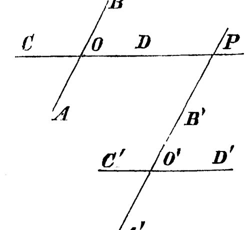
Zus. Die Verbindungslinie der Anfangspunkte zweier entgegengesetzt paralleler Geraden wird durch die Verbindungslinie irgend zweier anderer Punkte derselben geschnitten.

§ 14.

Die Winkel zwischen vier Geraden.

1. Die Geraden AB und CD schneiden einander in O, die Geraden $A'B'$ und $C'D'$ in O' so, dass OA |_| $O'A'$ OC |_| $O'C'$ ist. —

Es sind dann die Schenkel eines jeden Winkels an O den Schenkeln jedes Winkels an O' parallel. In Bezug auf die Richtungen der parallelen Schenkel sind folgende Fälle zu unterscheiden:



I. Beide parallele Schenkelpaare haben gleiche Richtung;
II. beide parallele Schenkelpaare haben entgegengesetzte Richtung;
III. das eine Paar ist gleich-, das andere entgegengesetzt gerichtet. $A'B'$ und CD schneiden einander in P. Dann ist

I. $\sphericalangle\ AOC = B'PD = A'O'C'$;
II. $\sphericalangle\ AOC = B'PD = B'O'D'$; § 13; 9.
III. $\sphericalangle\ AOC = B'PD$; $\sphericalangle\ B'PD + C'O'B' = 2R$ (§ 13; 9. Zus. 1.)
$\therefore \sphericalangle\ AOC + C'O'B' = 2R.$

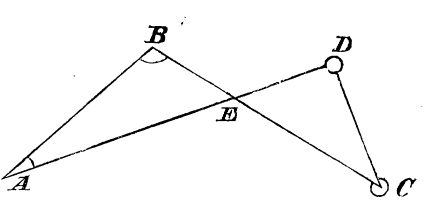
Zwei Winkel mit parallelen Schenkeln sind einander gleich, wenn die Schenkel gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben;
sind Supplementwinkel, wenn zwei Schenkel gleich-, die beiden andern entgegengesetzt gerichtet sind.

2. Jedes einfache Viereck (§ 9; 3) kann durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt werden. Da nun die Summe der Winkel eines Dreiecks 2 Rechte beträgt, so ergiebt sich der Satz:

Die Summe der inneren Winkel eines einfachen Vierecks beträgt vier Rechte.

Proklos: Bar. p. 230.

3. In dem Vierecke $ABCD$ schneiden einander die gegenüberliegenden Seitenstrecken BC, DA in dem Doppelpunkte (§ 9; 3) E.



$\sphericalangle\ DAB + ABC = -(BCD + CDA)$ (§ 13; 2);
$\therefore \sphericalangle\ D\hat{A}B + A\hat{B}C + B\check{C}D + C\check{D}A = 8R.$

Die Summe der Winkel auf der andern Seite des Vierecks beträgt also ebenfalls acht Rechte.

Ein Viereck heisst überschlagen, wenn die Summen seiner Winkel auf beiden Seiten einander gleich sind.

Ein Viereck ist überschlagen, wenn es einen Doppelpunkt besitzt. Die Summe seiner Winkel beträgt auf jeder Seite acht Rechte.

R. Wolf: Geradlinige Gebilde in der Ebene (1841) S. 12.

4. Ein Viereck heisst

ein Parallelogramm, wenn je zwei gegenüber liegende Seitenstrecken parallel sind;

ein Trapez, wenn nur zwei gegenüber liegende Seitenstrecken parallel sind;

ein Trapezoid, wenn keine Seitenstrecken parallel sind.

Anmerk. Nach dem Berichte von Proklos (Baroc. p. 97) rühren diese Begriffsbestimmungen von Posidonius her, der im ersten Jahrhunderte vor Chr. lebte.

5. In dem Parallelogramme $ABCD$ ist

$$\sphericalangle ABC + BCD = BCD + CDA = 2R;$$
$$\therefore \sphericalangle ABC = CDA.$$

In einem Parallelogramme sind je zwei gegenüber liegende Winkel einander gleich.

Eukl. I; 34.

6. In dem Vierecke $ABCD$ sei $\sphericalangle A = C$, $\sphericalangle B = D$. —

$$\therefore \sphericalangle A + B = C + D = 2R; \therefore AD \parallel BC;$$
$$\sphericalangle B + C = D + A = 2R; \therefore AB \parallel CD.$$

Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn je zwei gegenüber liegende Winkel desselben einander gleich sind.

Clavius zu Eukl. I; 34.

7. In dem Vierecke $ABCD$ sei $AB \parallel CD$ und Winkel $DAB = ABC$. — Da nun

$$\sphericalangle ABC + BCD = DAB + CDA = 2R;$$
$$\therefore BCD = CDA.$$

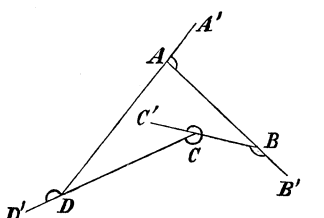
Wenn in einem Trapeze zwei an einer Parallelen liegende Winkel gleich sind, so sind auch die an der andern Parallelen liegenden Winkel einander gleich.

Zus. Zwei Strecken heissen symmetrisch (⋀), wenn die Verbindungslinien ihrer Endpunkte parallel sind, und sie mit jeder derselben gleiche gegenwendige Winkel bilden.

8. Wenn in einem einfachen Vierecke zwei gegenüber liegende Winkel durch eine Diagonale halbirt werden, so sind die beiden andern gegenüber liegenden Winkel einander gleich (§ 13; 3).

§ 15.

Die Winkel zwischen *n* Geraden.



1. In dem Vierecke $ABCD$, welches die einspringende Ecke C hat, verlängere man AB über B nach B', BC über C nach C', CD über D nach D', DA über A nach A'. Man kann nun das Viereck auf folgende Weise bilden: Auf der unbegrenzten Geraden AB bewegt sich der Punkt A nach B, dann dreht diese Gerade sich um den Winkel $B'BC$, der bewegte Punkt durchläuft darauf die Strecke BC, die Gerade beschreibt in gleichem Drehungssinne wie vorher den convexen Winkel $C'CD$ und so fort. Bei dieser Erzeugung des Vierecks erfolgen die Drehungen der unbegrenzten Geraden wie die Bewegungen des Punktes immer in demselben Sinne. Ist der bewegliche Punkt wieder in A angelangt, und dann ∢ $A'AB$ beschrieben, so befindet sich auch die unbegrenzte Gerade in ihrer ursprünglichen Lage. Wir wollen die in Rede stehenden Drehungen Schwenkungen der erzeugenden (unbegrenzten) Geraden nennen und ihre Summe mit S_n bezeichnen.

Auf gleiche Weise kann durch abwechselnde Schwenkung einer unbegrenzten Geraden und Bewegung eines Punktes auf ihr, indem beide Bewegungen in gleichem Sinne statt finden, jedes $n$eck erzeugt werden. Da die erzeugende Gerade stets in ihre ursprüngliche Lage zurückkehrt, so hat sie eine ganze Zahl, r, Umdrehungen ausgeführt, so dass man für die Summe der Schwenkungen S_n den Ausdruck erhält

$$S_n = 4r\ R,$$

in welchem r nicht kleiner als 1, aber auch nicht grösser als $n - 1$ sein kann, weil keine Schwenkung den Werth $4\,R$ erreicht.

Denn an einer ausspringenden Ecke (wie bei B in der obigen Figur des Vierecks) ergänzt die Schwenkung den hohlen $n$eckswinkel der anderen Seite zu $2R$. An einer einspringenden Ecke hingegen (bei C) hat die Schwenkung mit dem convexen $n$eckswinkel einen gestreckten Winkel gemein, so dass ihre Summe $6R$ beträgt. Die zu den Summen $2R$ und $6R$ verbundenen Schwenkungen und $n$eckswinkel sollen als einander zugeordnet bezeichnet werden.

2. Ist P_n die Summe aller „Winkel auf einer Seite des $n$ecks" (kurzweg: „$n$eckswinkel"), p die Anzahl der unter ihnen befindlichen convexen, also $n-p$ die Anzahl der concaven Winkel, S_n die Summe der zugeordneten Schwenkungen, so erhält man (1.)

$$P_n + S_n = 6pR + 2(n-p)R = 2(n+2p)R$$

Subtrahirt man hiervon $S_n = 4rR$ (1.), so ergiebt sich

$$P_n = 2(n + 2p - 2r)R = [2n + 4(p - r)]R.$$

Da hiernach die Summe der $n$eckswinkel im Allgemeinen nicht nur von n, sondern auch von der Anzahl der convexen Winkel und Umdrehungen abhängt, so bezeichnet man sie genauer durch $P_{n\,(p,\,r)}$, wo in der Klammer der erste Buchstabe die convexen Winkel, der zweite die Umdrehungen ausdrückt.

3. Wenn p $n$eckswinkel convex sind, so befinden sich unter den Aussenwinkeln p concave und $n-p$ convexe. Bezeichnet man durch r' die Umdrehungen der den Aussenwinkeln zugeordneten Schwenkungen, so ist

$$P_{n\,(n-p,\,r')} = 4nR - (2n + 4p - 4r)R = (2n + 4[n-p] - 4r')R.$$

Hieraus ergiebt sich

$$n = r + r';\ r' = n - r.$$

Die Summe der Aussenwinkel beträgt demnach

$$P_{n\,(n-p,\,n-r)} = 2[n + 2(n-p) - 2(n-r)]R$$
$$= 2(n + 2r - 2p)R = P_{n\,(r,\,p)}.$$

Die Winkelsummen $P_{n\,(p,\,r)}$ und $P_{n\,(n-p,\,n-r)}$ gelten also bei denselben Werthen von n, p und r für die beiden Seiten desselben $n$ecks. Da aber nach der letzten Gleichung

$$P_{n\,(n-p,\,n-r)} = P_{n\,(r,\,p)}$$

ist, so erhält man durch Vertauschung der Werthe von p und r in dem Ausdruck für die Winkelsumme



eines $n$ecks die Winkelsumme der andern Seite desselben Gebildes.

Zus. 1. Für ein gerades n ist $4R$ der kleinste Werth von $P_{n\,(p,\,r)}$, und es entspricht derselbe dem grössten Werthe von $r-p$. Man hat zur Ermittelung desselben die Gleichung $2\,[n-2\,(r-p)]\,R = 4R$, woraus folgt $r-p = \frac{n}{2} - 1$.

Für ein ungerades n ist die kleinste Winkelsumme $2R$. Aus $2\,[2-2\,(r-p)]\,R = 2R$ ergiebt sich als grösster Werth $r-p = \frac{n-1}{2}$.

4. Da ein convexer Winkel $> 2R$ ist, so ist auch $P_{n\,(p,\,r)}$ grösser als die Summe der darin enthaltenen p convexen Winkel, und um so mehr grösser als $2pR$.

$$2\,[n + 2\,(p-r)]\,R > 2pR;$$
$$\therefore\; n + p > 2r;\; \frac{n+p}{2} > r.$$

Weil ferner ein hohler Winkel $< 2R$, ein convexer $< 4R$ ist, so hat man

$$2\,(n-p)\,R + 4pR > 2\,(n + 2p - 2r)\,R;$$
$$\therefore\; 2r > p;\; r > \frac{p}{2}.$$

Die Anzahl aller Werthe von r, welche für einen bestimmten Werth von p möglich sind, ist also kleiner als $\frac{n+p}{2} - \frac{p}{2} = \frac{n}{2}$; sie beträgt für ein gerades n höchstens $\frac{n}{2} - 1$, für ein ungerades n höchstens $\frac{n-1}{2}$.

5. Die Summenformel $P_{n\,(p,\,r)} = 2\,(n + 2p - 2r)\,R$ gilt für $p = 1$ und $r = 1$ nicht. Denn, wäre sie für diese Werthe gültig, so hätte man folgende gleiche Summen für die $n$ecks- und Aussenwinkel:
$(n-1)$ concave $+ 1$ convexer W. $= (n-1)$ convexe $+ 1$ conc. W.,
folglich $(n-2)$ concave $= (n-2)$ convexen Winkeln,
was unmöglich ist.

Ausserdem ist für $p = 1$ und ein ungerades n die kleinste Winkelsumme $P_{n\,\left(1,\,\frac{n+1}{2}\right)} = 2R$ unmöglich, weil der stumpfe Winkel $> 2R$ ist.

6. Unter den $n+1$ Werthen von p ($p = o$ bis $p = n$)

gehören nur $\frac{n}{2} + 1$ oder $\frac{n+1}{2}$, je nachdem n gerade oder ungerade ist, verschiedenen $n$ecken an; die übrigen gelten für die Aussenwinkel (3.).

Ist n eine gerade Zahl, so kann jeder unter den $\frac{n}{2} + 1$ Werthen von p mit den $\frac{n}{2} - 1$ Werthen von r (4.) zusammen treten. Für einen bestimmten geraden Werth von n giebt es also

$$\left(\frac{n}{2} + 1\right) \left(\frac{n}{2} - 1\right) = \frac{n^2 - 4}{4}$$

verschiedene $n$ecke.

Wenn n eine ungerade Zahl ausdrückt, so kann jeder unter den $\frac{n+1}{2}$ Werthen von p mit $\frac{n-1}{2}$ Werthen von r sich verbinden (4.); nur für $p = 1$ ist die Anzahl der Werthe von r um 1 kleiner, nämlich $\frac{n-3}{2}$ (5.). Für einen bestimmten ungeraden Werth von n giebt es demnach im Allgemeinen

$$\frac{n+1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} - 1 = \frac{n^2 - 5}{4}$$

verschiedene $n$ecke.

Für einen bestimmten Werth von n ist die Anzahl der $n$ecke um 1 kleiner als das Produkt aus der Anzahl der geraden und der ungeraden Zahlen der natürlichen Zahlenreihe von 1 bis n.

7. Die $n$ecke, für welche $r - p = 1$ ist, heissen gemein, diejenigen, für welche $r - p = o$, überschlagen. Die kleinere Winkelsumme beträgt bei jenen $2\,(n - 2)\,R$; bei diesen ist auf beiden Seiten $P_n = 2\,n\,R$.

Zu den gemeinen $n$ecken gehören die einfachen hohlwinkligen $n$ecke mit der Winkelsumme $P_{n\,(o,\,1)} = 2\,(n - 2)\,R$.

Zus. 1. Wenn in einem einfachen hohlwinkligen $n$ecke alle Winkel einander gleich sind, so beträgt jeder $\frac{2\,(n-2)}{n}\,R$. Ist x die Anzahl solcher Gebilde von gleicher Eckenzahl, welche, rings um einen Punkt gelegt, genau einen Vollwinkel ausfüllen, so hat man

$$x = 4\,R : \frac{2\,(n-2)}{n}\,R = \frac{2\,n}{n-2}.$$

Für $n = 3$, $n = 4$ und $n = 6$ erhält x die Werthe 6, 4, 3. Von gleichwinkligen $n$ecken füllen also 6 Dreiecke, 4 Vierecke und 3 Sechsecke den Winkelraum eines Vollwinkels aus.

Proklos berichtet (Baroc. p. 175), dass die Kenntniss dieses Satzes von den Pythagoreern herrühre.

Zus. 2. Die kleinste Winkelsumme haben diejenigen hohlwinkligen $n$ecke, für welche n ungerade und $r - p = \frac{n-1}{2}$ ist, nämlich

$$P_{n\left(o,\ \frac{n-1}{2}\right)} = 2\,R.$$

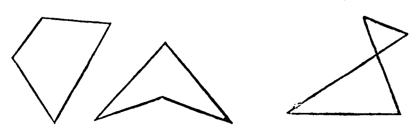
Zu ihnen gehören die Sternvielecke oder Drudenfüsse.

Die Winkelsumme eines Sternfünfecks bestimmte G. Campano im 13. Jahrh. nach Chr.

Zus. 3. Ein $n$eck heisst regelmässig, wenn seine Seitenstrecken und Winkel einander gleich sind.

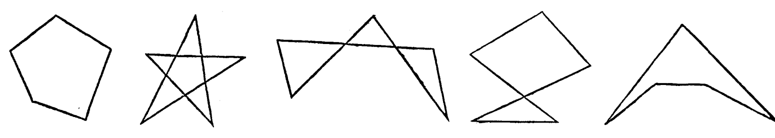
8. Wir wenden die vorstehenden Sätze auf bestimme Fälle an. Für $n = 3$ und $p = o$ ist $r = 1$ (4.). Es giebt also nur ein Dreieck (6.) mit der Winkelsumme $P_{3(0,1)} = 2\,R$.

An Vierecken giebt es drei Formen



$P_{4(0,1)} = 4R$; $P_{4(1,2)} = 4\,R$; $P_{4(2,2)} = 8\,R$.

Die fünf Formen der Fünfecke sind



$P_{5(0,1)} = 6\,R$; $P_{5(0,2)} = 2R$; $P_{5(1,2)} = 6\,R$; $P_{5(2,2)} = 10\,R$; $P_{5(2,3)} = 6\,R$.

Anmerk. Die Unterscheidung der $n$ecksformen und die Bestimmung ihrer Winkelsummen verdanken wir Rudolf Wolf: Geradlinige Gebilde in der Ebene (1841) § 12—16.

9. Ein einfaches $n$eck (§ 9; 3) kann durch innere Diagonalen, die einander nicht schneiden, in Dreiecke zerlegt werden. Schneidet man ein Dreieck ab, so zerfällt das $n$eck in

ein Dreieck und ein $(n - 1)$eck.

Schneidet man zwei Dreiecke ab, so hat man

zwei Dreiecke und ein $(n - 2)$eck.

Schneidet man nach einander $(n - 3)$ Dreiecke ab, so hat man $(n - 3)$ Dreiecke und ein $[n - (n - 3)]$eck $= n - 2$ Dreiecke.

Ein einfaches $n$eck kann durch Diagonalen in $(n - 2)$ Dreiecke zerlegt werden; die Summe seiner Innenwinkel beträgt also $(n - 2)\,2R$.

Zus. Fügt man zu den Innenwinkeln eines einfachen $n$ecks ihre Nebenwinkel, so erhält man $2nR$. Die Summe der Nebenwinkel ist also $4R$.

Proklos (Bar. p. 230).

10. Die erzeugende Gerade (1.) bildet zugleich mit dem $n$eck ein vollständiges $n$seit und die übrigen $n$ecke desselben (§ 10; 4). Die Winkel des $n$seits sind mithin auch durch die eines $n$ecks bestimmt, oder genauer: durch $n - 1$ Winkel des $n$ecks. Denn je zwei auf einander folgende Winkel desselben bilden mit ihren drei Schenkeln ein Dreieck, dessen dritte Ecke dem $n$seit angehört, und in welchem an dieser dritten Ecke durch jene beiden ein Winkel bestimmt ist. Solcher Dreiecke finden sich $n - 2$. Ebenso bilden die vier Schenkel von je drei auf einander folgenden Winkeln ein Viereck, in welchem die vierte Ecke dem $n$seit angehört u. s. w. Es sind also durch $n - 1$ Winkel bestimmt die Winkel an

$n - 2$ dritten Ecken von Dreiecken mit je zwei folgenden Winkeln,
$n - 3$ vierten „ „ Vierecken „ „ drei „ „
. . . .
2 $(n-1)$ten „ „ $(n-1)$ecken „ „ $(n-2)$ „ „
1 $n$ten Ecke eines $n$ecks „ „ $(n-1)$ „ „

Diese $1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 2)$ Ecken bilden mit den gegebenen $n - 1$ sämmtliche $\frac{n(n-1)}{2}$ Ecken des $n$seits. Durch einen Winkel an jeder Ecke sind aber die drei übrigen als Scheitel- oder Nebenwinkel bestimmt. So hat man den Satz:

In einem vollständigen $n$seite sind durch $n - 1$ Winkel eines darin enthaltenen $n$ecks sämmtliche Winkel bestimmt.

Carnot: Géom. de pos. 192.

C. nach ihrer perspectivischen Lage.

§ 16.

α) Strahlbüschel und Strahlbündel.

1. Der Inbegriff von allen Geraden, die durch einen Punkt gehen, wird ein Strahlbüschel, und von allen Geraden, die einer Geraden parallel sind, ein Strahlbündel genannt. Jede Gerade eines Büschels oder Bündels heisst ein Strahl. Alle Strahlen eines Strahlbüschels haben den Projectionspunkt gemein.

Zus. Der Projectionspunkt theilt jeden Strahl in zwei Halbstrahlen. Wird ein Strahl eines Strahlbündels von einer Geraden geschnitten, so werden alle Strahlen von ihr geschnitten (§ 13; 10). Die schneidende Linie theilt auch jeden Strahl in zwei Halbstrahlen.

J. Steiner: System. Entw. S. XIII. — Bretschneider: Lehrgeb. der nied. Geom. (1844) § 63.

β) Projectivische Gebilde.

2. Zwei Gebilde $ABCD\,..$, $A'B'C'D'\,..$ liegen perspectivisch, wenn jedem Punkte A des einen ein Punkt A' des andern so entspricht, dass die entsprechenden Punkte stets auf einem Strahle desselben Strahlbüschels oder Strahlbündels liegen, beide Gebilde von jedem Strahle in entsprechenden Punkten geschnitten werden.

In zwei perspectivischen Gebilden heissen zwei Strecken entsprechend, wenn ihre Endpunkte einander entsprechen — zwei Gerade, wenn sie durch je zwei entsprechende Punkte gehen — zwei Winkel, wenn die Schenkel des einen denen des andern entsprechen.

3. Zwei perspectivische Gebilde heissen gleichwendig oder gegenwendig, je nachdem sämmtliche entsprechende Winkel (2.) in gleichem Drehungssinne (in beiden rechts herum oder in beiden links herum) oder in entgegengesetztem Drehungssinne (im einen rechts, im andern links herum) von entsprechenden Strecken beschrieben werden. In beiden Fällen werden die Winkel gleichartig genannt. Als ungleichartig hingegen werden die Winkel bezeichnet, wenn sie theils gleichwendig, theils gegenwendig sind.

4. Lässt man das eine von zwei perspectivischen Gebilden durch irgend eine Bewegung aus der perspectivischen Lage heraustreten, ohne dass die gegenseitige Lage seiner Punkte sich ändert, so sind beide Gebilde in schiefer Lage.

5. Zwei Gebilde können perspectivisch liegen:

I. auf einem Strahlbündel. Die entsprechenden Strecken bilden mit den Strahlen
   1) gleiche Winkel: Congruenz,
   2) ungleiche Winkel. Die entsprechenden Geraden schneiden einander
      a) auf einem Strahle des Bündels: Affingleichheit,
      b) auf einer Geraden, die kein Strahl ist: Affinität.

II. auf einem Strahlbüschel. Die entsprechenden Geraden
   1) sind parallel: Aehnlichkeit,
   2) treffen auf einer Geraden zusammen: Collineation.

6. Zwei Gebilde, welche so beschaffen sind, dass sie in der eben (5.) angegebenen Weise perspectivisch liegen können, gleichviel, ob sie augenblicklich perspectivisch oder schief liegen, heissen projectivisch. Jede Gerade, die zwei entsprechende Punkte derselben verbindet, wird ein Projectionsstrahl genannt.

Drittes Hauptstück:

Die Congruenz.

§ 17.

Einleitung.

1. Zwei Gebilde heissen congruent, wenn sie perspectivisch auf einem Strahlbündel so liegen können, dass ihre entsprechenden Strecken an entsprechenden Punkten mit den Strahlen gleiche Winkel bilden. Das Zeichen der Congruenz ist $\cong$.

2. Die gleichen Winkel, welche zwei congruente Strecken in perspectivischer Lage mit den Strahlen bilden, sind entweder gleichwendig (wie bei I.), oder gegenwendig (wie bei II.). Im ersten Falle sind die entsprechenden Strecken *parallel* (§ 13; 7), im zweiten *symmetrisch* (§ 14; 7. Zus.).

3. Zwei Strahlbüschel sind congruent, wenn je zwei entsprechende Strahlenwinkel einander gleich sind.

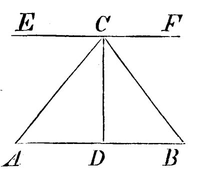
4. Wir betrachten zunächst die *geradlinigen* und dann die *Kreisgebilde*.

Unter den geradlinigen Gebilden gehen naturgemäss die Strecken den $n$ecken voran.

A. Geradlinige Gebilde.

§ 18.

Congruenz der Strecken.



1. In dem Dreiecke ABC seien die der Seitenstrecke AB anliegenden Winkel CAB und ABC einander gleich. — Zieht man durch C die Gerade $EF \parallel AB$, so ist $\sphericalangle\, CAB = ACE$; $\sphericalangle\, ABC = FCB$; $\therefore \sphericalangle\, ACE = FCB$. CA und CB liegen also symmetrisch zwischen den Parallelen AB, EF, und sind congruent (§ 17; 2).

Halbirt man den Winkel BCA durch eine Gerade, welche AB in D schneidet und dreht das Dreieck BCD um CD als Axe, so fällt — wenn B die Ebene CAD erreicht — BD mit AD (§ 13; 3. Zus. 1), CB mit CA, mithin auch B mit A zusammen. Demnach ist

$$CA = CB;\ AD = BD.$$

I. *In einem Dreiecke liegen zwei gleichen Winkeln gleiche Seitenstrecken gegenüber.*

Eukl. I; 6.

II. *Wenn in einem Dreiecke zwei Winkel einander gleich sind, so steht die Halbirungslinie des dritten auf der diesem Winkel gegenüber liegenden Seitenstrecke in ihrer Mitte senkrecht.*

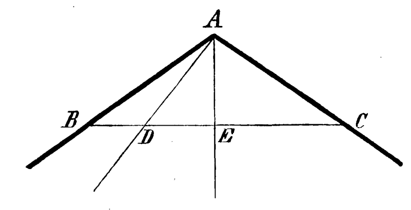
Zus. 1. Wenn in einem Dreiecke alle Winkel einander gleich sind, so sind auch alle seine Seitenstrecken einander gleich.

Zus. 2. Wenn in einem Dreiecke die Halbirungslinie eines Winkels auf der ihm gegenüber liegenden Seitenstrecke senkrecht steht, so sind die beiden übrigen Seitenstrecken gleich.

2. Ein Dreieck heisst gleichseitig, gleichschenklig oder ungleichseitig, je nachdem alle seine Seitenstrecken oder nur zwei derselben einander gleich, oder alle ungleich sind.

Eukl. I. Erklär. 24–26.

Die ungleiche Seitenstecke eines gleichschenkligen Dreiecks wird seine Basis, die derselben gegenüber liegende Ecke die Spitze genannt.



3. Wenn in einem Dreiecke ABC eine Seitenstrecke BC durch eine von der gegenüber liegenden Ecke ausgehende Gerade in E senkrecht halbirt wird, so sind die ungetheilten Winkel (BCA, ABC) und Seitenstrecken (AB, AC) einander gleich.

Clavius (1589) zu Eukl. I; 26.

Denn wäre $\sphericalangle ABC$ nicht gleich BCA, hingegen läge auf BC ein Punkt D so, dass man $\sphericalangle ADC = DCA$ hätte, alsdann müsste AE die Halbirungslinie des Winkels CAD (weil auch $\sphericalangle CEA = BEA = R$), folglich $ED = CE$ (1. II.) sein. Letzteres ist jedoch nur möglich, wenn D mit B zusammenfällt, oder $\sphericalangle ABC = BCA$ ist. Sind aber diese Winkel gleich, so ist auch $CA = BA$. W. z. b. w.

4. In dem Dreiecke ABC seien die Seitenstrecken CA und BA einander gleich. — Halbirt man den Winkel BAC durch eine Gerade, welche BC in E schneidet, und dreht das Dreieck BAE um AE als Axe so weit, bis B mit C zusammenfällt, so zeigt sich, dass $\sphericalangle ACE = ABE$, $\sphericalangle AEC = AEB$ und $CE = BE$ ist. Man hat also folgende Sätze:

I. In einem Dreiecke liegen zwei gleichen Seitenstrecken gleiche Winkel gegenüber;

oder: zwei gleiche Strecken mit gemeinschaftlichem Anfangspunkte liegen symmetrisch.

Eukl. I; 5. — Proklos (Baroc. p. 143) schreibt die Entdeckung dieses Satzes dem Thales zu.

II. Wenn in einem Dreiecke zwei Seitenstrecken gleich sind, so steht die Halbirungslinie des eingeschlossenen Winkels auf der dritten Seitenstrecke in der Mitte senkrecht.

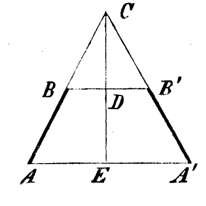
Chr. Clavius zu Eukl. I; 26.

Zus. 1. Im gleichseitigen Dreiecke sind alle Winkel gleich.

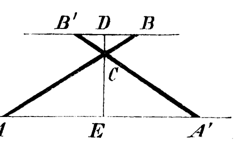
Zus. 2. In einem gleichschenkligen Dreiecke steht die gerade Verbindungslinie zwischen der Mitte der Basis und der Spitze auf der Basis senkrecht und halbirt den Winkel an der Spitze.

Zus. 3. Die Senkrechte, welche man aus der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks auf die Basis fällt, halbirt die letztere, sowie den Winkel an der Spitze.

5. Die Strecken AB und $A'B'$ seien symmetrisch. — Wenn die beiden Strecken einander in C schneiden, so ist



$\sphericalangle\ CAA' = CA'A$ und $\sphericalangle\ CBB' = CB'B$,



$\therefore\ CA' = CA;\ CB' = CB$ (1; I.);

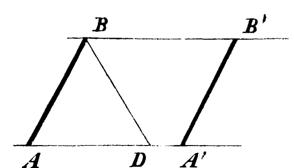
$\therefore CA' - CB' = CA - CB$, oder $B'A' = BA$.

Zwei symmetrische Strecken sind einander gleich.

Zus. 1. Nennt man ein Trapez gleichschenklig, wenn die nicht parallelen gegenüber liegenden Seitenstrecken einander gleich sind, so lässt sich der vorstehende Satz auch so ausdrücken:

Ein Trapez ist gleichschenklig, wenn an jeder parallelen Seitenstrecke desselben zwei gleiche Winkel liegen.

Zus. 2. Fällt man aus C eine Senkrechte auf die Parallelen, welche BB' in D, AA' in E schneidet, so ist $BD = B'D$ und $AE = A'E$, $\sphericalangle\ ACE = A'CE$ (4. Zus. 3).



6. $AA'B'B$ ist ein Parallelogramm. — Zieht man von B aus nach AA' eine Gerade BD so, dass $\sphericalangle BAD = BDA$ ist, so ist auch

$$\sphericalangle BDA' = B'A'D,$$

BD und BA sind also gleich (1; I.). Ebenso ist $BD = B'A'$ (5.)

$$\therefore AB = A'B'.$$

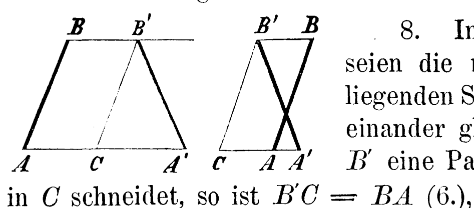
Parallele Strecken zwischen parallelen Geraden sind einander gleich.

Oder: In einem Parallelogramme sind die gegenüber liegenden Seitenstrecken einander gleich.

Eukl. I; 34.

7. Da zwei symmetrische oder parallele Strecken, die von Parallelen begrenzt werden, congruent heissen (§ 17; 1. 2), so lassen sich die beiden vorstehenden Hauptsätze so zusammenfassen:

Zwei congruente Strecken sind einander gleich.



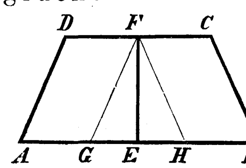
8. In dem Trapeze $AA'B'B$ seien die nicht parallelen gegenüber liegenden Seitenstrecken AB und $A'B'$ einander gleich. — Zieht man durch B' eine Parallele zu BA, welche AA' in C schneidet, so ist $B'C = BA$ (6.),

$$\therefore B'C = B'A'; \therefore \sphericalangle B'A'C = B'CA' \text{ (4)}:$$
$$\therefore \sphericalangle BAA' = B'CA' = B'A'A.$$

AB und $A'B'$ sind also symmetrisch und congruent.

Wenn zwei gleiche und nicht parallele Strecken perspectivisch zwischen zwei Parallelen liegen, so sind sie symmetrisch.

Zus. Wenn zwei gleiche Strecken perspectivisch zwischen zwei Parallelen liegen, so sind sie entweder symmetrisch oder parallel, mithin stets congruent.



9. In dem gleichschenkligen Trapeze $ABCD$ sei $AB \parallel CD$, E die Mitte von AB, F die Mitte von CD. — Zieht man EF und von F nach AB die Geraden $FG \parallel DA$, $FH \parallel CB$, so ist

$AG = BH$ (6.); $\therefore AE - AG = BE - BH$ oder $GE = HE$;
$\therefore EF \perp GH$ (4. Zus. 2); $EF \perp CD$.

In einem gleichschenkligen Trapeze steht die Gerade zwischen den Mitten der parallelen Seitenstrecken auf diesen Strecken senkrecht.

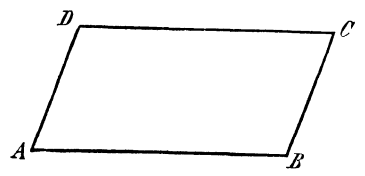
10. In dem Trapeze $ABCD$ seien die parallelen Seitenstrecken AB, CD in E und F von der Geraden EF senkrecht halbirt. — Zieht man durch F nach AB die Geraden $FG \parallel DA$ und $FH \parallel CB$, so ist

$$AG = BH \text{ (6.)}; \therefore GE = HE.$$
$$\therefore GF = HF \text{ (3.)}; AD = BC \text{ (6.)}.$$

Ein Trapez ist gleichschenklig, wenn seine parallelen Seitenstrecken durch eine Gerade senkrecht halbirt werden.

Zus. Die Gerade, welche die parallelen Seitenstrecken eines gleichschenklichen Trapezes senkrecht halbirt, geht durch den Schnittpunkt der symmetrischen Seitenstrecken (4. Zus. 3).

11. In dem einfachen Viereck $ABCD$ sei $AD \# BC$. — Zieht man durch D eine Gerade parallel zu AB, und trifft dieselbe BC in C', so ist $AD = BC'$ (6.).



Mithin ist $BC = BC'$; C' fällt also mit C zusammen, so dass $AB \parallel DC$ ist.

Ein einfaches Viereck ist ein Parallelogramm, wenn zwei gegenüber liegende Seitenstrecken desselben gleich und parallel sind.

Eukl. I; 33.

12. Uebersicht. — Die perspectivische Lage von zwei congruenten Strecken umfasst demnach folgende Fälle:

Die congruenten Strecken sind

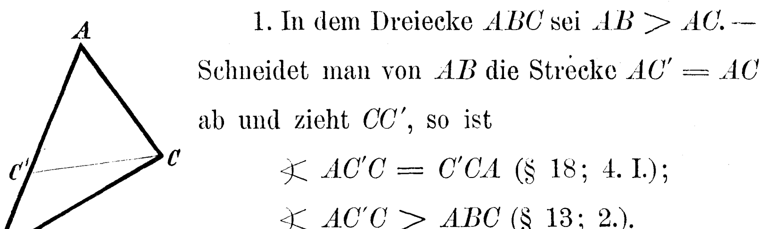
I. symmetrisch und haben
   a) einen Endpunkt gemein: als die gleichen Seitenstrecken eines gleichschenkligen Dreiecks;
   b) keinen Endpunkt gemein: als die gleichen und nicht parallelen Seitenstrecken in einem gleichschenkligen Trapeze.

II. parallel: als gegenüber liegende Seitenstrecken eines Parallelogramms.

Da die Bedingungen der Gleichheit in schärferer Begrenzung hervortreten, wenn die der Ungleichheit daneben gestellt werden, so folgt

§ 19.

Ungleichheit von Strecken.



1. In dem Dreiecke ABC sei $AB > AC$. — Schneidet man von AB die Strecke $AC' = AC$ ab und zieht CC', so ist

$$\sphericalangle\ AC'C = C'CA \quad (\S\ 18;\ 4.\ \text{I.});$$

$$\sphericalangle\ AC'C > ABC \quad (\S\ 13;\ 2.).$$

$\therefore \sphericalangle\ C'CA > ABC$, und daher $\sphericalangle\ BCA > ABC$.

In einem Dreiecke liegt der grösseren von zwei Seitenstrecken der grössere Winkel gegenüber.

Eukl. I; 18.

Zus. Die Theile des Winkels $BCA = \gamma$ lassen sich durch γ und $\sphericalangle\ ABC = \beta$ bestimmen. Es ist nämlich

I. $\sphericalangle\ AC'C + C'CA = \beta + \gamma = 2\,.\,C'CA;$

$$\therefore \sphericalangle\ C'CA = \frac{\beta + \gamma}{2}.$$

II. $\sphericalangle\ BCC' = \gamma - C'CA = \gamma - \frac{\beta + \gamma}{2}.$

$$= \frac{\gamma - \beta}{2}.$$

2. In einem Dreiecke liegt dem grösseren von zwei Winkeln die grössere Seitenstrecke gegenüber.

Eukl. I; 19.

Beweis: In dem Dreiecke ABC sei $\sphericalangle\ BCA > ABC$. — Dann ist $AB > AC$, weil weder $AB = AC$, noch $AB < AC$ sein kann. Denn, wäre $AB = AC$, so müsste $\sphericalangle\ BCA = ABC$ (§ 18; 4), und wäre $AB < AC$, so müsste $BCA < ABC$ (1.) sein. Beides aber widerspricht der Voraussetzung.

Anmerk. Der vorstehende Satz kann mit Hülfe von 1. Zus. auch leicht direkt bewiesen werden.

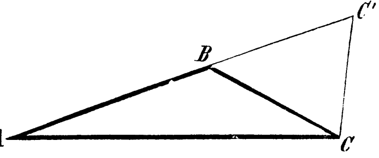
Zus. 1. In einem Dreiecke liegt dem rechten oder stumpfen Winkel die grösseste Seitenstrecke gegenüber.

Zus. 2. Unter allen Verbindungslinien eines

Punktes mit einer Geraden ist die senkrechte die kleinste; von zwei schiefen ist diejenige die grössere, welche mit der senkrechten den grösseren Winkel einschliesst.

Zus. 3. Die Strecke, welche einen Punkt mit einer Geraden senkrecht verbindet, heisst der Abstand des Punktes von der Geraden. Ebenso wird eine Strecke der Abstand zweier Parallelen genannt, welche sie senkrecht verbindet.

3. Verlängert man in dem Dreiecke ABC die Seitenstrecke AB über B um $BC' = BC$ und zieht CC', so ist $\sphericalangle\, BCC' = CC'A$ (§ 18; 4);



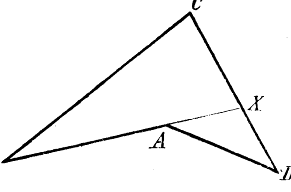
$$\sphericalangle\, ACC' > BCC';\ \sphericalangle\, ACC' > CC'A;$$
$$\therefore\ AC' > AC, \text{ oder } AB + BC > AC \ (2.).$$

In einem Dreiecke ist die Summe zweier Seitenstrecken grösser als die dritte.

Eukl. I; 20.

Zus. $BC > AC - BA$. In einem Dreiecke ist der Unterschied zweier Seitenstrecken kleiner als die dritte.

4. In dem einfachen Vierecke $ABCD$ sei A eine einspringende Ecke. — Verlängert man BA über A bis zum Durchschnitte X mit CD, so ist

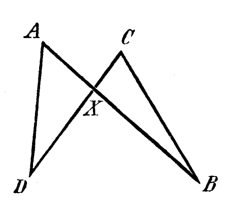


$$\left.\begin{aligned} AX + XD &> AD \\ BC + CX &> BA + AX \end{aligned}\right\} (3.)$$
$$\therefore\ BC + CD > BA + AD.$$

In einem Vierecke mit einspringender Ecke ist die Summe der an derselben zusammenstossenden Seitenstrecken kleiner als die Summe der beiden übrigen.

Eukl. I; 21.

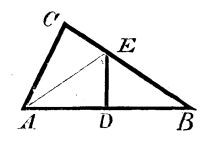
5. In dem überschlagenen Vierecke $ABCD$ schneiden einander die Seitenstrecken AB und CD in dem Doppelpunkte X. — Nun ist



$$AX + XD > AD$$
$$CX + XB > BC$$
$$\therefore\ AB + CD > BC + AD.$$

In einem überschlagenen Vierecke ist die Summe der Seitenstrecken mit dem Doppelpunkte grösser als die Summe der beiden übrigen.

L. Kunze: Geometrie (1842) § 29. Zus.



6. In dem Dreiecke ABC werde die Seitenstrecke BC von der Geraden, welche AB in D senkrecht halbirt, in E geschnitten. — Zieht man AE, so ist

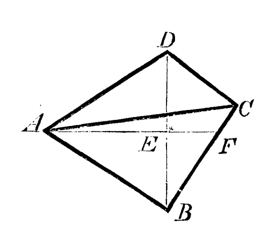
$$AE = BE \text{ (§ 18; 3)};$$
$$\therefore AE + EC = BC.$$
$$AE + EC > AC;$$
$$\therefore BC > AC.$$

Von zwei Seitenstrecken eines Dreiecks wird die grössere von der Geraden geschnitten, welche die dritte Seitenstrecke senkrecht halbirt.

Chr. F. Pfleiderer: Scholien zu Eukl. Elem. (1827) Heft 1. S. 195.

Zus. 1. Die Gerade, welche die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks senkrecht halbirt, geht durch die Spitze desselben.

Zus. 2. Die Spitzen aller gleichschenkligen Dreiecke, welche die Basis gemein haben, liegen auf der Geraden, welche die Basis senkrecht halbirt.



7. In dem einfachen Vierecke $ABCD$ sei $AB = AD$ und $BC > CD$. — Zieht man die beiden Diagonalen und halbirt den Winkel BAD, so schneidet diese Halbirungslinie die Diagonale BD in ihrer Mitte E senkrecht (§ 18; 4. II.) und geht durch einen Punkt F der Strecke BC (6.). Also ist

$$\sphericalangle DAC < CAB.$$

Der vorstehend entwickelte Satz kommt am häufigsten in folgender Auffassung zur Anwendung:

Wenn zwei Dreiecke, ABC und ADC, in zwei Seitenstrecken übereinstimmen, so liegt der grösseren dritten Seitenstrecke der grössere Winkel gegenüber.

Eukl. I; 25.

8. In dem einfachen Vierecke $ABCD$ sei $AB = AD$, und die Diagonale AC theile den Winkel BAD in die Theile $CAB > DAC$. — Die Halbirungslinie des Winkels BAD geht also

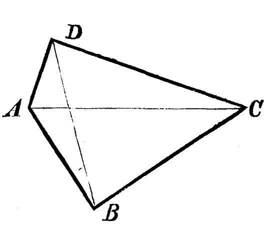
durch den Winkel BAC, schneidet BD in dem Mittelpunkte E senkrecht und theilt BC in F. Es ist mithin

$$BC > CD \text{ (6.)}.$$

Wenn zwei Dreiecke, ABC und ADC, in zwei Seitenstrecken übereinstimmen, so liegt dem grösseren eingeschlossenen Winkel die grössere dritte Seitenstrecke gegenüber.

Eukl. I; 24.

9. In dem einfachen Vierecke $ABCD$ seien die gegenüber liegenden Winkel $ABC = ADC$ recht oder stumpf. Ferner sei $AB > AD$. — Nun ist

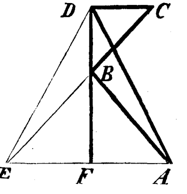


$\measuredangle BDA > ABD$ (1.); $\therefore \measuredangle CDB < DBC$;

$$\therefore BC < DC \text{ (2.)}.$$

Wenn zwei Dreiecke, ABC und ADC, in einer Seitenstrecke und dem ihr gegenüber liegenden rechten oder stumpfen Winkel übereinstimmen, und es ist die zweite Seitenstrecke im ersten Dreiecke grösser als im zweiten, so ist die dritte im ersten kleiner als im andern.

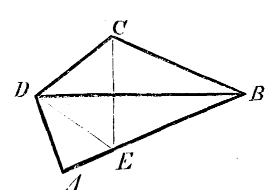
10. In dem überschlagenen Vierecke $ABCD$ schliessen die in B zusammenstossenden Seitenstrecken mit der Diagonale BD und ihrer Verlängerung BF gleiche Winkel $CBD = ABF$ ein. — Verlängert man CB über B um $BE = BA$ und zieht EA, welche Linie von DB in F geschnitten wird, so ist AE in F durch BF senkrecht halbirt (§ 18; 4. II.),



$$\therefore DA = DE \text{ (6. Zus. 2)};$$
$$CB + BE < CD + DE \text{ (3.)};$$
$$\therefore CB + BA < CD + DA.$$

Wenn in einem überschlagenen Vierecke die an einer Ecke zusammenstossenden Seitenstrecken mit der Diagonale gleiche Winkel bilden, so ist ihre Summe kleiner als die der übrigen Seitenstrecken.

Nach Heliodor von Larissa hat Hero von Alexandrien (284—221 v. Chr.) diesen Satz in seiner Katoptrik bewiesen. Bossut: Geschichte der Math., übers. von Reimer (1804). I. S. 282.



11. In dem einfachen Vierecke $ABCD$ schliesse die Diagonale BD mit den ungleichen Seitenstrecken AB, BC gleiche Winkel $ABD = DBC$ ein. — Schneidet man von dem grösseren Schenkel AB des Winkels ABC die Strecke $BE = BC$ ab und zieht DE nebst CE, so wird CE durch BD senkrecht halbirt (§ 18; 4. II.), es ist daher $DC = DE$ (§ 18; 3) und

$$AE > DA - DE \text{ (3. Zus.)}$$
$$\therefore AB - BC > DA - DC.$$

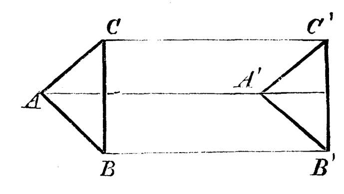
Wenn in einem einfachen Vierecke die an einer Ecke zusammentreffenden Seitenstrecken mit der Diagonale gleiche Winkel bilden, so ist ihr Unterschied grösser als der zwischen den übrigen Seitenstrecken.

§ 20.

Congruenz der Dreiecke.

1. Wenn von einem Dreiecke zwei Seitenstrecken gezeichnet sind, so ist durch die freien Endpunkte derselben die dritte bestimmt. Zwei perspectivisch congruente Streckenpaare zweier Dreiecke können nun folgende Lagen haben:

I. Beide Paare parallel;
II. „ „ symmetrisch;
III. Ein Paar parallel, das andere symmetrisch.



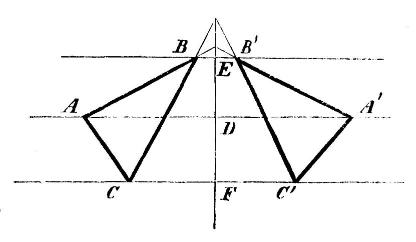
2. Zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ liegen perspectivisch zwischen Parallelstrahlen und es sei $AB \parallel A'B'$ und $BC \parallel B'C'$. — Nun ist, wenn $\#$ bedeutet: $=$ und $\parallel$,

$$BB' \;\#\; AA';\; CC' \;\#\; BB' \text{ (§ 18; 6)}$$
$$\therefore AA' \;\#\; CC';\; \therefore AC \;\#\; A'C' \text{ (§ 18; 11).}$$

Wenn von zwei Dreiecken, die perspectivisch zwischen Parallelstrahlen liegen, zwei Seitenstrecken des einen den entsprechenden des andern parallel sind, so sind auch die dritten parallel. Die Dreiecke sind also congruent (§ 17; 1. 2.).

Zus. Zwei perspectivische Dreiecke sind **gleichwendig**, wenn ihre entsprechenden Strecken parallel laufen.

3. Die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ liegen perspectivisch zwischen Parallelstrahlen und es seien die entsprechenden Strecken AB und $A'B'$, BC und $B'C'$ symmetrisch. — Wenn man die Strecken AA', BB', CC' in D, E, F halbirt, so ist (§ 18; 9) DE senkrecht auf AA' und BB', EF senkrecht auf BB' und CC'. Da aber in E nur eine Senkrechte auf BB' möglich ist, so ist DEF eine Gerade.



$$\therefore AC \wedge A'C' \text{ (§ 18; 10).}$$

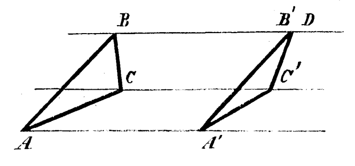
Wenn von zwei Dreiecken, die perspectivisch auf einem Strahlbündel liegen, zwei Seitenstrecken des einen den entsprechenden des andern symmetrisch sind, so sind auch die dritten symmetrisch. Die Dreiecke sind also congruent (§ 17; 1. 2).

Zus. 1. Die entsprechenden Strecken BC und $B'C'$, so wie AB und $A'B'$ schneiden einander auf der Geraden DE (§ 19; 6. Zus. 2). Auf dieser Linie liegt auch der Durchschnitt von AC und $A'C'$. Die Gerade DE wird die **Symmetrie-Axe** der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ genannt.

Wenn zwei Dreiecke perspectivisch liegen und ihre entsprechenden Seitenstrecken symmetrisch sind, so schneiden dieselben einander auf einer Geraden, welche die Strecken zwischen entsprechenden Punkten senkrecht halbirt und die Symmetrie-Axe der Dreiecke heisst.

Zus. 2. Zwei perspectivische Dreiecke sind **gegenwendig**, wenn ihre entsprechenden Strecken symmetrisch liegen.

4. Die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ liegen perspectivisch zwischen Parallelstrahlen, so, dass $AB \parallel A'B'$ und $BC \wedge B'C'$ ist. — Liegt der Punkt D auf der Verlängerung von BB' über B', so ist



$$\sphericalangle\ ABD = A'B'D;$$
$$\sphericalangle\ CBD = 180^0 - C'B'D.$$

Ist nun $\sphericalangle\ CBD$ spitz, so hat man
$$\sphericalangle\ CBD < C'B'D.$$
Subtrahirt man diese Ungleichheit von der ersten Gleichung, so ergiebt sich
$$\sphericalangle\ ABC > A'B'C'.$$
$$\therefore\ AC > A'C' \ (\S\ 19;\ 8).$$

Die Strecken AC und $A'C'$ sind also nicht congruent. Die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind daher ebenfalls nicht congruent. Berücksichtigt man Nr. 2 und Nr. 3, so erhält man den Satz:

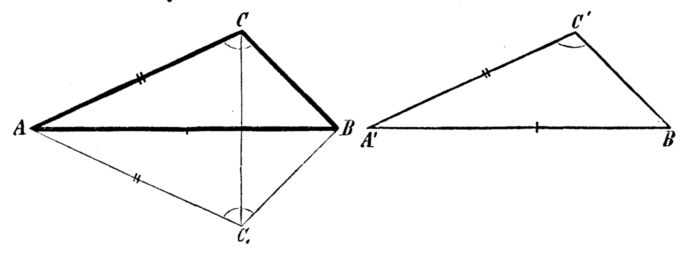
Wenn zwei Dreiecke perspectivisch auf einem Strahlbündel liegen, so sind sie nur dann congruent, wenn zwei Seitenstrecken des einen den entsprechenden des andern parallel oder symmetrisch sind.

5. Aus dem vorstehenden Satze (4.) ergiebt sich sofort:

In zwei congruenten Dreiecken sind die entsprechenden Seitenstrecken und Winkel einander gleich.

Denn, je zwei entsprechende Strecken sind gleich, weil sie congruent sind (§ 18; 7); und je zwei entsprechende Winkel sind die gleichen Unterschiede von zwei gleichen, zwischen ihren Schenkeln und einem Parallelstrahle liegenden, Winkelpaaren.

6. Wenn die Seitenstrecken eines Dreiecks denen eines andern der Reihe nach gleich sind, so lege man an das eine Dreieck ABC das andere $A'B'C'$ so an, dass in A und B zwei entsprechende



Grenzpunkte gleicher Strecken zusammenfallen, und die andern entsprechenden Strecken $BC = BC'$ und $AC = AC'$ auf verschiedenen Seiten von AB liegen. Zieht man nun durch A und B Parallele zu CC' so ist
$$AC \wedge AC',\ BC \wedge BC' \ (\S\ 18;\ 8);$$
$$\therefore\ ABC \cong ABC' \ (3.).$$

Zwei Dreiecke sind congruent, wenn die Seitenstrecken des einen denen des andern der Reihe nach gleich sind.

Eukl. I; 8.

7. In den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ sei $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ und $\sphericalangle\, ABC = A'B'C'$. — Es kann nun weder $AC > A'C'$, noch $AC < A'C'$ sein, weil im ersten Falle $\sphericalangle\, ABC > A'B'C'$, im zweiten $\sphericalangle\, ABC < A'B'C'$ sein müsste (§ 19; 7), beides aber der Voraussetzung widerspricht. Mithin ist $AC = A'C'$, und die beiden Dreiecke sind congruent (6.).

Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in zwei Seitenstrecken und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

Eukl. I; 4.

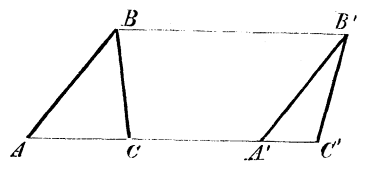
8. In den Dreiecken ABC, $A'B'C'$ sei $AB = A'B'$, $\sphericalangle\, CAB = C'A'B'$, $\sphericalangle\, ABC = A'B'C'$. — Wäre nun $A'C'$ nicht gleich AC, so müsste entweder auf der Strecke $A'C'$ oder auf ihrer Verlängerung ein Punkt P so liegen, dass man $AC = A'P$ hätte. Alsdann würde $ABC \cong A'B'P$ (7.), mithin $\sphericalangle\, ABC = A'B'P$ (5.) und $\sphericalangle\, A'B'P = A'B'C'$ sein. Da dies nur möglich ist, wenn P mit C' zusammenfällt, so ergiebt sich $AC = A'C'$ und hieraus die Congruenz von ABC und $A'B'C'$ (7.).

Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in einer Seitenstrecke und den ihr anliegenden Winkeln übereinstimmen.

Zusatz. Wenn in zwei Dreiecken ABC, $A'B'C'$, $AB = A'B'$ $\sphericalangle\, ABC = A'B'C'$ und $\sphericalangle\, BCA = B'C'A'$ ist, so sind auch die Winkel CAB und $C'A'B'$ einander gleich (§ 13; 3), die Dreiecke also congruent.

Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in einer Seitenstrecke, einem anliegenden und dem gegenüber liegenden Winkel übereinstimmen.

Eukl. I; 26. — Eudemos schrieb die Entdeckung beider Sätze dem Thales zu. Proklos: Baroc. p. 212.



9. In den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ sei $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $\sphericalangle\ BAC = \sphericalangle\ B'A'C'$. — Zieht man nun durch B eine Parallele zu AC und legt $A'B'C'$ so gleichwendig mit ABC, dass $A'B'$ parallel zu AB zwischen die erwähnten Parallelen fällt, dann liegt $A'C'$ auf der Verlängerung von AC, weil nach Voraussetzung $\sphericalangle\ BAC = B'A'C'$ ist. Für $B'C'$ ist nun zweierlei möglich: entweder $B'C' \parallel BC$, oder $B'C' \wedge BC$. Im ersten Falle ist $ABC \cong A'B'C'$ (2.); im zweiten ist

$$\sphericalangle\ ACB + A'C'B' = 180^0$$

und die Dreiecke sind nicht congruent (4.).

Wenn zwei Dreiecke in zwei Seitenstrecken und einem gleichen Strecken gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, so sind sie congruent, wofern nicht die den andern gleichen Strecken gegenüber liegenden Winkel zusammen einem gestreckten Winkel gleich sind.

Zus. 1. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in zwei Seitenstrecken übereinstimmen, die der einen gegenüber liegenden Winkel gleich, die der andern gegenüber liegenden zugleich spitz oder stumpf sind.
Th. Simpson: Elements of Geometry (1760) I; 17.

Zus. 2. Da in einem Dreiecke der kleineren von zwei Seitenstrecken stets ein spitzer Winkel gegenüber liegt und die Summe zweier spitzer Winkel kleiner als ein gestreckter ist, so ergiebt sich auch der Satz:

Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in zwei Seitenstrecken und dem der grösseren gegenüber liegenden Winkel übereinstimmen.
W. J. G. Karsten: Mathesis theoretica etc. (1760) § 87.

10. Wenn zwei congruente Dreiecke ABC, $A'B'C'$ perspectivisch zwischen Parallelstrahlen liegen, so kann man die entsprechenden Ecken auf einander fallen lassen, indem man

I. bei paralleler Lage der entsprechenden Strecken das Dreieck $A'B'C'$ um den Abstand zweier entsprechender Punkte, wie AA', längs dieser Strecke verschiebt;

II. bei symmetrischer Lage der entsprechenden Strecken das Dreieck $A'B'C'$ um die Symmetrieaxe im Betrage von 180° dreht.

Hieraus ergiebt sich:

Die Flächen von zwei congruenten Dreiecken sind einander gleich.

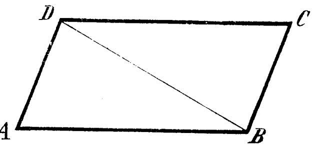
11. Die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ liegen perspectivisch auf einem Strahlbüschel, so dass ihre entsprechenden Ecken A und A' u. s. w. gleiche Abstände vom Projectionspunkte haben, weshalb sie Gegenpunkte heissen. — Da nun die entsprechenden Strecken gleich und parallel sind (7.), so ist $ABC \cong A'B'C'$ (6.).

Zwei Dreiecke sind congruent, wenn die Ecken des einen der Reihe nach Gegenpunkte von denen des andern bilden.

Zus. Dreht man das eine dieser Dreiecke um den Projectionspunkt im Betrage von 180°, so fällt es mit dem andern zusammen.

§ 21.

Das Parallelogramm.



1. In dem einfachen Vierecke $ABCD$ seien die gegenüber liegenden Seitenstrecken einander gleich: $AB = CD$, $BC = DA$. — Zieht man die Diagonale BD, so ist

$$\triangle ABD \cong CDB \text{ (§ 20; 6.);}$$
$$\therefore \measuredangle ABD = CDB;\ \measuredangle BDA = DBC \text{ (§ 20; 5);}$$
$$\therefore AB \parallel CD;\ BC \parallel DA.$$

Ein einfaches Viereck ist ein Parallelogramm, wenn seine gegenüber liegenden Seitenstrecken einander gleich sind.

Chr. Clavius (1589) zu Eukl. I; 34.

Zus. Die Fläche eines Parallelogramms wird durch eine Diagonale halbirt (§ 20; 10.).

2. I. In dem Parallelogramme $ABCD$ schneiden die Diagonalen einander in M. — Es ist nun

$\triangle MAB \cong MCD$ (§ 20; 8.)

$\therefore MA = MC;\ MB = MD.$

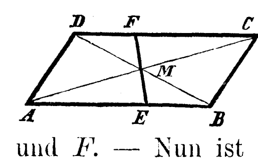
In einem Parallelogramme halbiren die Diagonalen einander.

II. In dem Vierecke $ABCD$ halbiren die Diagonalen einander in M. — Nun ist

$$\triangle\ MAB \cong MCD \text{ (§ 20; 7.)};$$
$$\therefore AB \;\#\; CD;\ BC \;\#\; DA.$$

Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn seine Diagonalen einander halbiren.

Clavius a. a. O.



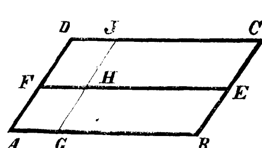
3. In dem Parallelogramme $ABCD$ sei M der Schnittpunkt der Diagonalen, und eine durch M gehende Gerade treffe die gegenüberliegenden Seitenstrecken AB, CD in E und F. — Nun ist

$$\triangle\ MAE \cong MCF \text{ (§ 20; 8)};$$
$$\therefore ME = MF.$$

Nennt man einen Punkt den Mittelpunkt eines Gebildes, wenn jede durch ihn gelegte Gerade das Gebilde in zwei gleichen Abständen schneidet, so ist M der Mittelpunkt des Parallelogramms, und man hat den Satz:

Der Durchschnittspunkt der Diagonalen eines Parallelogrammes ist der Mittelpunkt desselben.

Clavius a. a. O.



4. In dem Parallelogramme $ABCD$ seien BC und DA in E und F halbirt. Eine Gerade, die AD parallel ist, schneide AB in G, FE in H, DC in J. — Nun ist (§ 18; 6.)

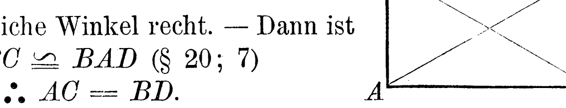
$$EF \;\#\; AB;\ GJ \;\#\; BC;\ BE \;\#\; GH;$$
$$\therefore GH = HJ.$$

Die Gerade EF halbirt also alle Strecken, welche AB und CD verbinden und zugleich AD parallel laufen.

Wird nun eine Gerade ein Durchmesser eines Gebildes genannt, wenn sie sämmtliche Strecken eines Strahlbündels, die durch das Gebilde begrenzt werden, halbirt, so ist EF ein Durchmesser des Parallelogramms $ABCD$.

Die Verbindungslinien der Mitten je zweier gegenüber liegender Seitenstrecken eines Parallelogramms sind Durchmesser desselben.

5. In dem Parallelogramme $ABCD$ seien



I. sämmtliche Winkel recht. — Dann ist

$\triangle ABC \cong BAD$ (§ 20; 7)

$\therefore AC = BD.$

In einem rechtwinkligen Parallelogramme sind die Diagonalen einander gleich.

Proklos: zu Eukl. I; 33. (Bar. p. 232).

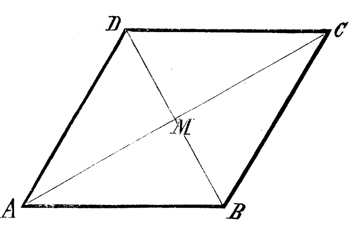
II. die Diagonalen einander gleich. — Nun ist

$\triangle ABC \cong BAD$ (§ 20; 6).

$\therefore \measuredangle ABC = BAD = 90^0.$

Ein Parallelogramm mit gleichen Diagonalen ist rechtwinklig.

6. Wenn in dem Parallelogramme $ABCD$ die Diagonalen einander in M schneiden, und wenn



I. entweder $AB = BC$,

II. oder $\measuredangle AMB = BMC = 90^0$,

III. oder $\measuredangle ABM = MBC$ u. s. w. ist —

so ist $\triangle MAB \cong MCB$. In Worten:

I. In einem Parallelogramme mit gleichen Seitenstrecken stehen die Diagonalen auf einander senkrecht und halbiren die Winkel.

II. Wenn in einem Parallelogramme die Diagonalen auf einander senkrecht stehen, so halbiren sie die Winkel, und es sind alle Seitenstrecken einander gleich.

III. Werden in einem Parallelogramme die Winkel von den Diagonalen halbirt, so schneiden diese einander senkrecht, und alle Seitenstrecken sind einander gleich.

Proklos: zu Eukl. I; 34.

7. Aus dem Vorstehenden ergiebt sich folgende Eintheilung der Parallelogramme: Ein Parallelogramm heisst

I. mit ungleichen anstossenden Seitenstrecken und
1. schiefen Winkeln ein Rhomboid,
2. rechten Winkeln ein Oblongum oder Rechteck;
II. mit gleichen Seitenstrecken und
1. schiefen Winkeln ein Rhombus oder eine Raute,
2. rechten Winkeln ein Quadrat.

Eukl. I; Def. 30—33.

§ 22.

Punktreihen und *n* ecke.

1. Wenn zwei symmetrische oder zwei parallele Punktreihen perspectivisch auf einem Strahlbündel liegen, so sind die entsprechenden Strecken derselben einander gleich (§ 18; 5. 6.)

J. Steiner: System. Entw. (1832) S. 44.

2. Umgekehrt, wenn zwei Punktreihen einander so entsprechen, dass die Strecke zwischen irgend zwei beliebigen Punkten der einen Reihe der Strecke zwischen den entsprechenden Punkten der andern Reihe gleich ist; und wenn die Punktreihen entweder einen selbstentsprechenden Punkt gemein haben (§ 18. 4.) oder gleichgerichtet parallel sind (§ 18; 11.): so liegen sie perspectivisch auf einem Strahlbündel.

J. Steiner a. a. O. S. 51.

3. In zwei Punktreihen $ABCD$.., $A'B'C'D'$ mögen die Punkte der einen Reihe denen der andern so entsprechen, dass die entsprechenden Punkte in gleicher Ordnung auf einander folgen und dass die $n-1$ Strecken zwischen n auf einander folgenden Punkten der einen Reihe den entsprechenden gleich sind. — Legt man nun die beiden Punktreihen mit zwei entsprechenden Punkten zusammen z. B. mit A und A′ und lässt AB und $A'B'$ nicht auf eine Gerade fallen, so ist $BB' \parallel CC' \parallel DD'$..(2.); die Punktreihen sind also congruent.

Zwei gleichgeordnete Punktreihen von je n entsprechenden Punkten sind congruent, wenn $n-1$ Strecken zwischen allen Punkten der einen Reihe den entsprechenden der andern gleich sind.

A. F. Möbius: Barycentr. Calcul (1827) S. 182.

4. Zwei Vierecke, $ABCD$ und $A'B'C'D'$ liegen perspectivisch zwischen Parallelstrahlen, so dass die entsprechenden Strecken

AB und $A'B'$, BC und $B'C'$, CD und $C'D'$ entweder parallel oder symmetrisch sind. — Dann ist auch (§ 20; 4)

entweder $AC \# A'C'$, $AD \# A'D'$ und $BD \# B'D'$ (§ 20; 2),
oder $AC \wedge A'C'$, $AD \wedge A'D'$ und $BD \wedge B'D'$ (§ 20; 3).

Zwei Vierecke sind congruent, wenn sie perspectivisch zwischen Parallelstrahlen liegen, und drei Seitenstrecken des einen, welche alle vier Ecken verbinden, den entsprechenden des andern entweder parallel oder symmetrisch sind.

Zus. 1. Zwei congruente Vierecke mit symmetrischen entsprechenden Seitenstrecken haben eine Symmetrie Axe (§ 20; 3. Zus.)

Zus. 2. Zwei congruente Vierecke sind entweder gleich- oder gegenwendig.

Zus. 3. In zwei congruenten Vierecken sind alle entsprechenden Seitenstrecken und Winkel einander gleich.

5. Die Vierecke $ABCD$, $A'B'C'D'$ seien durch die Diagonalen AC und $A'C'$ in je zwei Dreiecke zerlegt. Sind nun die Dreiecke des einen Vierecks denen des andern congruent, und die congruenten Paare beide entweder gleichwendig oder gegenwendig, so sind auch die Vierecke congruent. Die Bedingung der Congruenz wird aber erfüllt

I. wenn die fünf Seitenstrecken der Dreiecke des einen Vierecks denen des andern gleich sind (§ 20; 6);

II. wenn die vier Seitenstrecken des einen Vierecks denen des andern gleich sind, und ausserdem $\sphericalangle ABC = A'B'C'$ ist, da alsdann $ABC \cong A'B'C'$ (§ 20; 7) und $CDA \cong C'D'A'$ (§ 20; 6) ist;

III. wenn $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CD = C'D'$, $\sphericalangle ABC = A'B'C'$, $\sphericalangle BCD = B'C'D'$ ist, weil dann $ABC \cong A'B'C'$ (§ 20; 7) mithin $\sphericalangle BCA = B'C'A'$ und $\sphericalangle ACD = A'C'D'$ $\therefore$ $ACD \cong A'C'D'$;

IV. wenn $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ und die diesen Seitenstrecken anliegenden Winkel der Reihe nach gleich sind, weil dann $ABC \cong A'B'C'$ (§ 20; 7) und daher $ACD \cong A'C'D'$ (20; 8) ist. So erhält man folgende Sätze:

Zwei gleichwendige oder gegenwendige Vierecke sind congruent, wenn sie entweder

I. in fünf Verbindungslinien zwischen den vier Ecken, oder

II. in vier Seitenstrecken und einem Winkel, oder

III. in drei Seitenstrecken und den beiden eingeschlossenen Winkeln, oder

IV. in zwei anstossenden Seitenstrecken und drei Winkeln übereinstimmen.

Vgl. A. L. Crelle: Geometrie (1826) I; 76—85.

6. Der Satz Nr. 4 lässt sich zu folgendem erweitern:

Zwei $n$ecke sind congruent, wenn sie perspectivisch zwischen Parallelstrahlen liegen und $n-1$ Seitenstrecken des einen, welche alle Ecken verbinden, den entsprechenden des andern $n$ecks entweder parallel oder symmetrisch sind.

Zus. Die entsprechenden Seitenstrecken, welche symmetrisch sind, schneiden einander sämmtlich auf einer Geraden, der Symmetrie-Axe.

Ein Gebilde wird symmetrisch genannt, wenn es durch eine Symmetrie-Axe in zwei congruente Theile zerlegt werden kann.

7. Der Satz § 20; 11. führt zu folgendem allgemeinerem:

Zwei $n$ecke sind congruent, wenn sie perspectivisch auf einem Strahlbüschel liegen, und die entsprechenden Ecken Gegenpunkte bilden.

Zwei solche Gebilde setzen vereint ein centrisches Gebilde zusammen, in welchem der Projectionspunkt Mittelpunkt heisst, insofern er auf jedem Strahle die Strecke halbirt, welche zwei Punkte des Umfanges verbindet. In einem centrischen Gebilde ist daher die Anzahl der Ecken und Seitenstrecken gerade, und es sind je zwei gegenüber liegende Seitenstrecken parallel.

R. Baltzer: Gleichheit und Aehnlichkeit etc. (1852) 25.

8. Ebenso lassen sich die Sätze unter Nr. 5 verallgemeinern:

Zwei gleich- oder gegenwendige $n$ecke sind congruent,

I. wenn sie entsprechend in den n Seitenstrecken und $n-3$ Diagonalen übereinstimmen.

Denn man kann ein $n$eck durch Diagonalen so in $n-2$ Dreiecke zerlegen, dass in zweien derselben sich je 2, und in den übrigen $n-4$ je eine Seitenstrecke befindet.

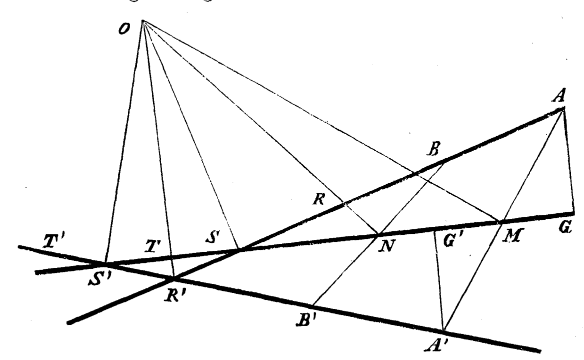
II. wenn sie in n Seitenstrecken und $n-3$ eingeschlossenen Winkeln,

III. wenn sie in $n-1$ Seitenstrecken und $n-2$ eingeschlossenen Winkeln,

IV. wenn sie in $n-2$ anstossenden Seitenstrecken und $n-1$ Winkeln übereinstimmen.

§ 23.

Schiefe Lage congruenter Gebilde.



1. Die beiden congruenten Punktreihen AB.. und $A'B'$.. befinden sich in schiefer Lage (§ 16; 4) und haben den Punkt $R'T$ gemein, welchem R und T' entsprechen. — Ist S die Mitte von RT, S' die Mitte von $R'T'$, so hat man $ST = R'S'$. Zieht man durch S und S' die Gerade s, so ist dieselbe der Halbirungslinie des Winkels $ATA' = \alpha$ parallel, da $\sphericalangle\ SS'T = S'ST = \frac{\alpha}{2}$ ist.

Wird s von AA' in M, von BB' in N geschnitten, und fällt man aus A und A' die Senkrechten AG und $A'G'$ auf s, so hat man — weil $AS = A'S'$ und $\sphericalangle\ ASG = A'S'G' = \frac{\alpha}{2}$ ist —

$$\triangle\ ASG \cong A'S'G';\ AG = A'G';$$
$$\therefore\ AMG \cong A'MG';\ AM = A'M.$$
$$\therefore\ GG' = SS'.$$

Die Gerade s, welche die Abstände AA', BB' .. der entsprechenden Punkte halbirt und der Halbirungslinie von α parallel ist, wird die Situationsaxe der Punktreihen genannt. Die Abstände der Fusspunkte der aus entsprechenden Punkten auf die Situationsaxe gefällten Senkrechten sind gleich SS'.

I. Auf zwei congruenten Punktreihen in schiefer Lage befinden sich zwei entsprechende Punkte, die von dem Durchschnitte der Punktreihen gleichweit

entfernt sind. Durch sie geht eine Gerade (Situationsaxe), welche die Abstände aller übrigen entsprechenden Punkte halbirt.

II. Verschiebt man die eine $A'B'$ . . von zwei schiefliegenden congruenten Punktreihen so weit, dass in ihrem Durchschnitte zwei entsprechende Punkte zusammenfallen (d. i. um $T'R'$), so befinden sich beide in perspectivischer Lage (§ 22; 2), und die Situationsaxe wird zur Symmetrieaxe.

2. Errichtet man in S und S' auf RR' und TT' Senkrechte, welche in O zusammentreffen, so ist

$$ORS \cong OR'S \cong OR'S' \cong OT'S';$$
$$\therefore\ OS = OS';\ OR = OR' = OT'.$$

Ebenso ist $OSA \cong OS'A'$, $OSB \cong OS'B'$ . .

$$\therefore\ OA = OA',\ OB = OB' \ldots$$
$$OM \perp AA',\ ON \perp BB' \ldots \text{(§ 18; 4. Zus. 2)};$$
$$\sphericalangle\ SOA = S'OA' \text{ oder } \sphericalangle\ SOA' + A'OA = S'OS + SOA';$$
$$\therefore\ \sphericalangle\ A'OA = S'OS = \alpha.$$

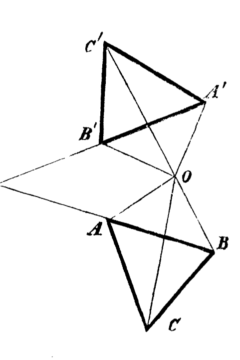
Der Punkt O, welcher von je zwei entsprechenden Punkten gleichweit entfernt ist, und an welchem die Verbindungslinien mit den entsprechenden Punkten gleiche Winkel einschliessen, heisst der Situationspunkt der Punktreihen. Die Gerade OT, welche ihn mit dem Durchschnitte der Punktreihen verbindet, schneidet die Situationsaxe senkrecht. α heisse der Situationswinkel.

I. Die Geraden, welche die Verbindungslinien je zweier entsprechender Punkte schiefliegender Punktreihen senkrecht halbiren, schneiden einander in einem Punkte (dem Situationspunkte). Die Geraden, welche diesen mit je zwei entsprechenden Punkten verbinden, schliessen gleiche Winkel ein.

II. Dreht man die eine von zwei schiefliegenden congruenten Punktreihen um den Situationspunkt, so fallen die entsprechenden Punkte entweder zusammen, oder sie bilden Gegenpunkte auf einem Strahlbüschel, je nachdem der Situationswinkel bis auf null verkleinert oder bis zu 180° vergrössert wird.

L. J. Magnus: Aufg. u. Lehrs. aus d. analyt. Geom. (1833) I. S. 59. — R. Baltzer: Gleichheit und Aehnlichkeit etc. (1852) 20.

3. Es seien ABC . . und $A'B'C'$ . . zwei gleichwendige congruente $n$ecke in schiefer Lage. — Hat man den Situationspunkt O der entsprechenden Strecken AB, $A'B'$ bestimmt, so ist $OAB \cong OA'B'$ (2.), mithin $OBC \cong OB'C'$. O ist folglich auch der Situationspunkt von BC und $B'C'$ etc. Auch ist $\sphericalangle\ AOB + B'OA = A'OB' + B'OA$ oder $\sphericalangle\ B'OB = A'OA$, und $\sphericalangle\ BOC + COB' = COB' + B'OC'$ oder $\sphericalangle\ BOB' = COC'$ etc.



I. Zwei gleichwendige congruente $n$ecke haben einen Situationspunkt.

II. Dreht man von zwei gleichwendigen congruenten $n$ecken in schiefer Lage das eine um den Situationspunkt, so fallen die entsprechenden Punkte entweder zusammen oder sie bilden Gegenpunkte auf einem Strahlbüschel, je nachdem der Situationswinkel gleich null oder 180° gemacht wird.

4. Es seien ABC . . und $A'B'C'$ . . zwei gegenwendige congruente $n$ecke in schiefer Lage. — Wenn die Situationsaxe s von AB und $A'B'$ in S und S' durch diese Geraden, in L, M und N von AA', BB' und CC' geschnitten wird, und man fällt auf s die Senkrechten AG, BH, CJ, $A'G'$, $B'H'$, $C'J'$, so ist $SBC \cong S'B'C'$. $\therefore$ $SC = S'C'$ und $\sphericalangle\ BSC = B'S'C'$; $SCJ \cong S'C'J'$ (§ 20; 8), $CNJ \cong C'NJ'$, $\therefore$ $CN = C'N$ etc. Aus $SJ = S'J'$ folgt $SS' = JJ' = HH' = GG'$.

I. Zwei gegenwendige congruente $n$ecke in schiefer Lage haben eine Situationsaxe.

II. Verschiebt man von zwei schiefliegenden gegenwendigen congruenten $n$ecken das eine längs einer Seitenstrecke, bis im Durchschnitte zwei entsprechende Punkte zusammenfallen, so liegen beide

perspectivisch auf einem Strahlbüschel, und die Situationsaxe wird zur Symmetrieaxe.

R. Baltzer: Gleichheit und Aehnlichkeit etc. 23. 24.

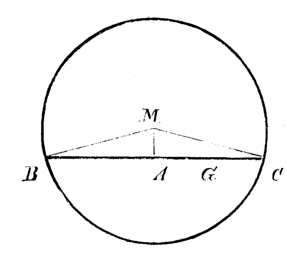
B. Der Kreis.

§ 24.

Die Lage gerader Linien in Bezug auf einen Kreis.

1. Der Abstand einer Geraden vom Mittelpunkte eines Kreises ist

entweder kleiner als der Radius,
oder dem Radius gleich,
oder grösser als der Radius.



2. In dem Kreise um M mit dem Radius r sei $MA < r$ der Abstand einer Geraden g von dem Mittelpunkte. — Da nun A innerhalb des Kreises liegt (§ 6; 12. Zus. 2.), so schneidet g jederseits von A, in B und C, den Kreis. Dann ist $MB = MC = r$. Jede andere von M nach g gehende Gerade ist entweder kleiner oder grösser als der Radius (§ 19; 2). Insbesondere liegt jeder Punkt zwischen B und C innerhalb des Kreises. Die Strecke BC heisst eine Sehne des Kreises.

Eine Gerade, deren Abstand vom Mittelpunkte kleiner ist als der Radius, schneidet den Kreis in zwei Punkten, und die von diesen Durchschnittspunkten begrenzte Strecke (Sehne) liegt innerhalb des Kreises.

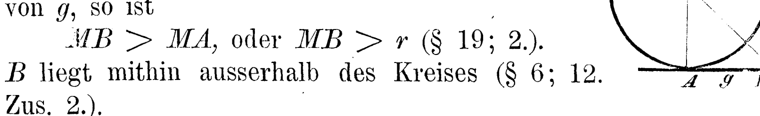
Zus. 1. Alle zwischen ihren Endpunkten befindlichen Punkte einer Sehne liegen innerhalb des Kreises.

Eukl. III; 2.

Zus. 2. Eine Gerade, welche durch einen ausserhalb eines Kreises liegenden Punkt geht und den Kreis in zwei Punkten schneidet, wird eine Sekante (Schneidende) genannt.

3. In dem Kreise um M mit dem Radius r sei $MA = r$ der Abstand einer Geraden g von dem Mittelpunkte. — Ist B ein beliebiger Punkt von g, so ist

$$MB > MA, \text{ oder } MB > r \text{ (§ 19; 2.)}.$$



B liegt mithin ausserhalb des Kreises (§ 6; 12. Zus. 2.).

Eine Gerade, deren Abstand vom Mittelpunkte dem Radius gleich ist, hat mit dem Kreise nur den Fusspunkt der aus dem Mittelpunkte auf sie gefällten Senkrechten gemein; alle übrigen Punkte derselben liegen ausserhalb des Kreises.

Eukl. III; 16.

Zusatz. Eine Gerade, welche mit einem Kreise nur einen Punkt gemein hat, und deren übrige Punkte ausserhalb des Kreises liegen, heisst eine Tangente (Berührende) desselben. Der gemeinschaftliche Punkt wird Berührungspunkt genannt.

4. Die Tangente g berühre den Kreis um M in A. — Gäbe es nun irgend einen Punkt B in g ausserhalb A, für welchen der Winkel MBA recht wäre, so hätte man

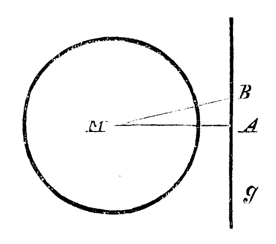
$$MB < MA, \text{ oder } MB < r \text{ (§ 19; 2)};$$

der Punkt B läge also innerhalb des Kreises. Da dies der Voraussetzung widerspricht, so ergiebt sich, dass $\sphericalangle MAB = R$ ist.

Eine Tangente steht senkrecht auf dem Radius, welcher nach dem Berührungspunkte geht.

Eukl. III; 18.

5. Der Mittelpunkt M eines Kreises mit dem Radius r sei mit der Geraden g durch eine Strecke MA verbunden, welche in A auf g senkrecht steht, und es sei $MA > r$. — Ist B ein beliebiger anderer Punkt von g, so ist $MB > MA$, mithin auch $MB > r$. Alle Punkte von g liegen also ausserhalb des Kreises.



Eine Gerade, deren Abstand vom Mittelpunkte grösser ist als der Radius, liegt mit allen ihren Punkten ausserhalb des Kreises.

6. Aus dem Vorhergehenden folgt, dass eine Gerade mit

einem Kreise höchstens 2 Punkte gemein haben kann, dass also drei beliebige Punkte eines Kreises nicht auf einer Geraden liegen. So ergiebt sich (§ 4; 5):

Der Kreis ist eine krumme Linie. Ein Theil desselben heist ein Bogen.

7. Zieht man aus dem Mittelpunkte M eines Kreises Radien nach den Endpunkten A und B einer Sehne, so ist das Dreieck MAB gleichschenklig. Daher gelten die Sätze:

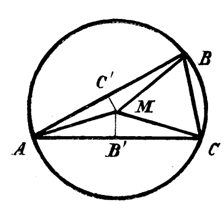
I. Wenn ein Durchmesser auf einer Sehne senkrecht steht, so halbirt er dieselbe (§ 18; 4. Zus. 3), und umgekehrt.

II. Wenn ein Durchmesser eine Sehne halbirt, so schneidet er sie senkrecht (§ 18; 4. Zus. 2).
Eukl. III; 3.

III. Wenn eine Gerade eine Sehne senkrecht halbirt, so geht sie durch den Mittelpunkt des Kreises (§ 19; 6. Zus. 2).

8. Ein $n$eck, dessen Seitenstrecken Sehnen eines Kreises sind, dessen Ecken also auf dem Kreise liegen, heisst dem Kreise eingeschrieben (Sehnen-$n$eck), der Kreis ihm umgeschrieben.

Ein $n$eck, dessen Seitenstrecken Tangenten eines Kreises sind, heisst dem Kreise umgeschrieben (Tangenten-$n$eck), der Kreis ihm eingeschrieben. Der Kreis, dem ein $n$eck umgeschrieben ist, liegt entweder innerhalb oder ausserhalb des $n$ecks.



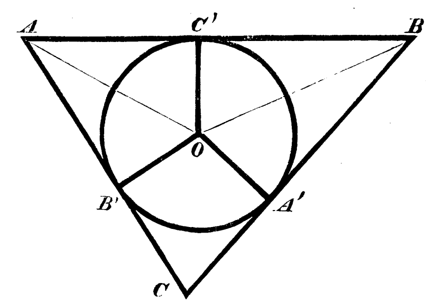
9. In dem Dreiecke ABC sei C' die Mitte von AB, B' die Mitte von AC, und es schneiden einander die in C' und B' auf AB und AC errichteten Senkrechten in M. — Dann ist

$$AM = BM = CM \text{ (§ 20; 7)},$$

mithin sind diese Linien Radien des dem Dreiecke ABC umgeschriebenen Kreises.

Der Durchschnittspunkt der beiden Geraden, welche zwei Seitenstrecken eines Dreiecks senkrecht halbiren, ist der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises.
Eukl. IV; 5.

10. In dem Dreiecke ABC schneiden einander die Halbirungslinien der Winkel CBA und BAC in O. — Fällt man aus O auf AB, BC, CA die Senkrechten OC', OA', OB', so ist



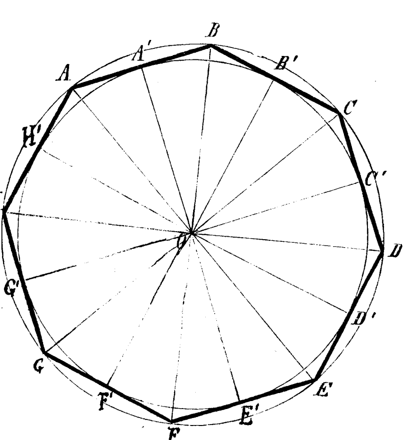
$$\triangle\ OAB' \cong OAC';\ \triangle\ OBC' \cong OBA'\ (\S\ 20;\ 8);$$
$$\therefore\ OB' = OC' = OA'.$$

Diese Linien sind mithin die Radien eines Kreises, welcher dem Dreiecke ABC eingeschrieben ist.

Der Durchschnittspunkt der beiden Geraden, welche zwei Winkel eines Dreiecks halbiren, ist der Mittelpunkt des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises.

Eukl. IV; 4.

11. In dem regulären $n$ecke $ABCD$.. seien die gleichen $n$eckswinkel bei A und B durch zwei Gerade halbirt, welche in O zusammentreffen. Zieht man OC, so ist $\triangle\ AOB \cong BOC$ (§ 20; 7); folglich ist $OA = OB = OC$, und $\sphericalangle\ BCD$ durch OC halbirt. Ebenso ist $OD = OC$ und OD halbirt den Winkel CDE u. s. w.



Sind ferner A', B', C'.. die Mitten von AB, BC, CD.., so ist $\triangle\ AOA' \cong BOA'$, mithin $OA' \perp AB$; $BOA' \cong BOB'$, also $OA' = OB'$. Eben so zeigt man, dass $OC' = OB'$ und $OC' \perp CD$ ist u. s. w.

In einem einfachen regelmässigen $n$ecke schneiden einander die Halbirungslinien der Winkel und die senkrechten Halbirungslinien der Seitenstrecken

in einem Punkte, dem Mittelpunkte des umgeschriebenen und des eingeschriebenen Kreises.

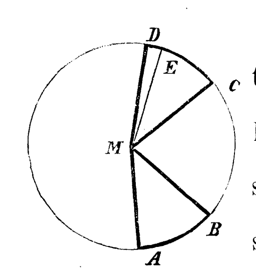
Chr. Clavius zu Eukl. IV; 13. 14.

§ 25.

Bogen und Winkel.

1. Ein Winkel, der am Mittelpunkte eines Kreises von zwei Radien gebildet wird, heisst ein Centriwinkel. Ein von zwei Sehnen oder von einer Sehne und einer Tangente gebildeter Winkel, dessen Scheitel auf der Kreislinie liegt, wird ein Peripheriewinkel genannt. Ein Winkel, dessen Schenkel Sehnen, Tangenten oder Sekanten sind und dessen Scheitel weder im Centrum, noch auf dem Kreise liegt, heisst ein innerer oder äusserer excentrischer Winkel, je nachdem der Scheitel sich innerhalb oder ausserhalb des Kreises befindet.

Man sagt, ein Winkel stehe auf dem Kreisbogen, welcher von seinen Schenkeln eingeschlossen wird und dem Scheitel seine hohle Seite zukehrt.



2. In dem Kreise um M seien die Centriwinkel AMB und CMD einander gleich.— Dreht man nun den Winkel AMB um M, so dass AM den Winkel AMC beschreibt, so deckt der Bogen AB den Bogen CD.

In einem Kreise sind die Bogen einander gleich, auf denen gleiche Centriwinkel stehen.

Eukl. III; 26.

Zus. In einem Kreise steht der grössere von zwei Centriwinkeln auf dem grösseren Bogen.

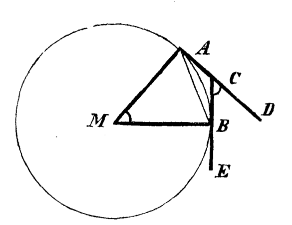
3. In dem Kreise um M seien die Bogen AB und CD einander gleich. — Wäre nun ein Theil des Winkels CMD, nämlich $\sphericalangle\ CME$, dem Winkel AMB gleich, so hätte man auch $CE = AB$ (2.), und $CD = CE$, was unmöglich ist.

In einem Kreise liegen gleichen Bogen gleiche Centriwinkel gegenüber.

Eukl. III; 27.

Zus. Dem grösseren von zwei Bogen eines Kreises liegt der grössere Centriwinkel gegenüber.

4. An den Kreis um M seien in A und B Tangenten gelegt, welche einander in C schneiden. — Es sei D ein Punkt auf der Verlängerung von AC. Nun ist



$\sphericalangle\ MBC = CAM = R;$

$\therefore \sphericalangle\ AMB + BCA = \sphericalangle\ DCB + BCA = 2\ R;$

$\therefore \sphericalangle\ AMB = DCB.$

Ein Centriwinkel ist dem excentrischen Winkel der beiden Tangenten gleich, die in den Endpunkten des eingeschlossenen Bogens den Kreis berühren.

Zus. Die beiden Tangenten an den Gegenpunkten eines Durchmessers sind parallel.

5. In dem Kreise um M bildet die Sehne AB mit den Tangenten in ihren Endpunkten, welche einander in C schneiden, zwei Peripheriewinkel CAB und ABC, die beide auf dem Bogen AB stehen. Nun ist

$$\sphericalangle\ CAM = MBC = R;$$
$$\sphericalangle\ BAM = MBA;$$
$$\therefore \sphericalangle\ CAB = ABC.$$

Ist D ein Punkt auf der Verlängerung von AC, so ist

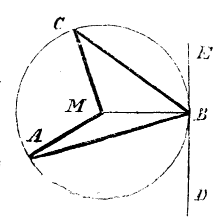
$$\sphericalangle\ AMB = DCB = CAB + ABC;$$
$$\therefore \sphericalangle\ CAB = ABC = \tfrac{1}{2}\ AMB.$$

Verlängert man CB über B bis E, so ist

$$\sphericalangle\ EBA + ABC = \tfrac{1}{2}\ (B\breve{M}A + A\breve{M}B);$$
$$\therefore \sphericalangle\ EBA = \tfrac{1}{2}\ B\acute{M}A.$$

Ein Peripheriewinkel, der von einer Sehne und einer Tangente gebildet wird, ist halb so gross wie der auf demselben Bogen stehende Centriwinkel.
Eukl. III; 32.

6. In dem Kreise um M steht der von den Sehnen AB, BC gebildete Peripheriewinkel mit dem Centriwinkel AMC auf demselben Bogen AC. — Zieht man durch B eine Tangente DE, so ist



$$\sphericalangle\ DBA + ABC + CBE = \tfrac{1}{2}\,(BMA + AMC + CMB);$$
$$\sphericalangle\ DBA = \tfrac{1}{2}\ BMA;$$
$$\sphericalangle\ CBE = \tfrac{1}{2}\ CMB.$$
$$\therefore \sphericalangle\ ABC = \tfrac{1}{2}\ AMC.$$

Ein Peripheriewinkel ist halb so gross wie der auf demselben Bogen stehende Centriwinkel.

Anmerk. Den vorstehenden Beweis giebt B. Lamy in: Les Élémens de Géométrie (Paris 1695) S. 74. Der Euklidische Beweis (III; 20) erfordert die Unterscheidung der verschiedenen Lagen des Mittelpunktes, welcher entweder auf einem Schenkel des Peripheriewinkels, auf der Winkelfläche oder ausserhalb derselben liegen kann.

Zusatz 1. Ein Peripheriewinkel auf dem Halbkreise ist ein rechter Winkel.

Eukl. III; 31. Diogenes Laertius schreibt die Entdeckung dieses Satzes dem Thales zu.

Zusatz 2. Ein Peripheriewinkel ist spitz oder stumpf, je nachdem der Bogen, auf welchem er steht, kleiner oder grösser als ein Halbkreis ist.

Eukl. III; 31.

7. Peripheriewinkel, die auf demselben Bogen stehen, sind einander gleich. Denn jeder von ihnen ist halb so gross wie der auf demselben Bogen stehende Centriwinkel (6.).

Eukl. III; 21. 32.

Zusatz 1. In einem Kreise sind zwei Bogen einander gleich, wenn auf ihnen gleiche Peripheriewinkel stehen (2.).

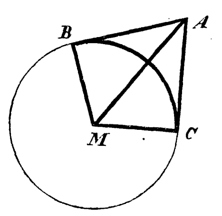
Zusatz 2. In einem Kreise sind zwei Peripheriewinkel einander gleich, wenn sie auf gleichen Bogen stehen (3.).

Beide Zusätze sind in Eukl. III; 26. 27 enthalten.

Zusatz 3. Zwei parallele Gerade, auf denen Punkte eines Kreises liegen (Sehnen, Tangenten), schliessen zwei gleiche Bogen ein.

A. L. Crelle: Elem. d. Geometrie (Berlin 1826) 263 Theilweise bei Clavius a. a. O. p. 427. 428. und Pappos VII; 96.

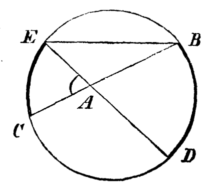
Zusatz 4. Zwei Gerade, welche zwei gleiche Bogen eines Kreises einschliessen und einander im Kreise nicht schneiden, sind parallel (Zus. 2.).



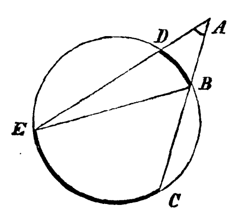
8. Zwei von einem Punkte A ausgehende Tangenten berühren den Kreis M in B und C. — In dem Viereck $ABMC$ ist $AMB \cong AMC$ (§ 20; 9), also wenn AM gezogen wird, $\sphericalangle BAM = CAM$; $\sphericalangle BMA = CMA$.

Die Gerade, welche den Ausgangspunkt zweier Tangenten mit dem Mittelpunkte des Kreises verbindet, halbirt den Winkel beider Tangenten, den von ihnen eingeschlossenen Bogen und den Centriwinkel, der auf demselben steht.

Clavius zu Eukl. III; 37.



9. Von zwei Geraden, die durch den Punkt A gehen, schneidet die eine den Kreis in B und C, die andere in D und E. Es sind 2 Fälle zu unterscheiden:



I. A liege innerhalb des Kreises, aber ausserhalb des Mittelpunktes. — Dann ist

$$\sphericalangle CAE = CBE + BED.$$

Ein innerer excentrischer Winkel ist der Summe der beiden Peripheriewinkel gleich, welche auf den von seinen Schenkeln eingeschlossenen Bogen stehen.

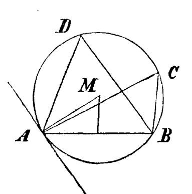
II. A liege ausserhalb des Kreises. Dann ist

$$\sphericalangle CAE = CBE - DEB.$$

Ein äusserer excentrischer Winkel ist gleich dem Unterschiede der beiden Peripheriewinkel, die auf den von seinen Schenkeln eingeschlossenen Bogen stehen.

Anmerk. Diese beiden Sätze über die excentrischen Winkel finden sich in der Optik des Alhacen, der 1038 zu Cairo starb.

Zusatz. Ein innerer excentrischer Winkel ist grösser, ein äusserer kleiner als der auf demselben Bogen stehende Peripheriewinkel.



10. In den Dreiecken ABC und ABD, welche auf derselben Seite von AB liegen, sei $\sphericalangle\ BCA = BDA$. — Beschreibt man einen Kreis um ABC, so muss D auf demselben liegen. (9. Zus.).

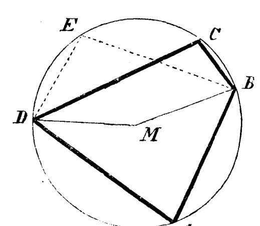
Die Scheitel aller gleichen Winkel, deren Schenkel durch zwei feste Punkte gehen und auf einer Seite der durch diese Punkte bestimmten Geraden liegen, befinden sich nebst den festen Punkten auf einem Kreise.

Charmander: Pappos VII. Einl.

Zusatz. Die Scheitel aller rechten Winkel, deren Schenkel durch zwei feste Punkte gehen, liegen auf einem Halbkreise.

§ 26.

Die Winkel der eingeschriebenen $n$ecke.



1. In dem einem Kreise um M eingeschriebenen einfachen Vierecke $ABCD$ ist

$$\sphericalangle\ DAB = \tfrac{1}{2}\ D\hat{M}B$$

$$\sphericalangle\ BCD = \tfrac{1}{2}\ B\check{M}D$$

$$\therefore \sphericalangle DAB + BCD = \tfrac{1}{2}(D\hat{M}B + B\check{M}D) = 2R.$$

In einem eingeschriebenen einfachen Vierecke betragen zwei gegenüber liegende Winkel zusammen zwei Rechte.

Eukl. III; 22.

Zusatz. Ein eingeschriebenes Parallelogramm ist rechtwinklig.

2. (Umkehrung von 1.) In dem einfachen Vierecke $ABCD$ sei $\sphericalangle\ DAB + BCD = 2\ R$. — Weil nun $\sphericalangle\ ABC + BCD + CDA + DAB = 4\ R$ (§ 14; 2.) $\therefore \sphericalangle\ ABC + CDA = 2\ R$.

Beschreibt man einen Kreis um das Dreieck ABD und zeichnet einen Peripheriewinkel BED, welcher mit BCD auf demselben Bogen steht, so liegt C ebenfalls auf diesem Kreise, weil

$$\sphericalangle\ DAB + BCD = DAB + BED$$

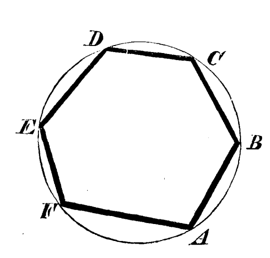
$$\therefore \sphericalangle\ BCD = BED\ (\S\ 25;\ 10).$$

Einem einfachen Vierecke kann ein Kreis umge-

schrieben werden, wenn in demselben zwei gegenüber liegende Winkel zusammen zwei Rechte betragen.

Chr. Clavius zu Eukl. III; 22.

3. Es sei $ABCDEF$ ein dem Kreise um M eingeschriebenes Sechseck. Bei der Betrachtung der Winkel sind drei Fälle zu unterscheiden:



I. Ein einfaches Sechseck. In demselben sind alle Winkel hohl und man hat

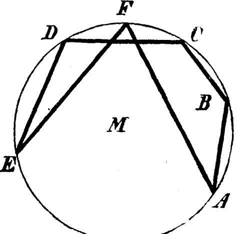
$$\sphericalangle ABC = \tfrac{1}{2}(4\,R - CMA) = 2\,R - \tfrac{1}{2}\,CMA$$
$$\sphericalangle CDE = \tfrac{1}{2}(4\,R - EMC) = 2\,R - \tfrac{1}{2}\,EMC$$
$$\sphericalangle EFA = \tfrac{1}{2}(4\,R - AME) = 2\,R - \tfrac{1}{2}\,AME$$
$$\therefore \sphericalangle ABC + CDE + EFA = 3\,.\,2\,R - 2\,R = 2\,.\,2\,R.$$

Ebenso erhält man

$$\sphericalangle BCD + DEF + FAB = 2\,.\,2\,R.$$

Die Summe je dreier abwechselnder Winkel eines eingeschriebenen einfachen Sechsecks ist vier Rechte.

II. Ein verschobenes Sechseck. Hat dasselbe einen convexen Innenwinkel $E\check{F}A$, so ergiebt sich:



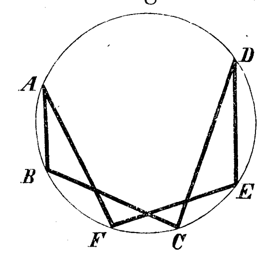
$$\sphericalangle ABC = \tfrac{1}{2}(4\,R - CMA) = 2\,R - \tfrac{1}{2}\,CMA$$
$$\sphericalangle CDE = \tfrac{1}{2}(4\,R - EMC) = 2\,R - \tfrac{1}{2}\,EMC$$
$$\sphericalangle EFA = 4\,R - \tfrac{1}{2}\,AME$$
$$\therefore \sphericalangle ABC + CDE + E\check{F}A = 6\,R.$$

Ferner $\sphericalangle BCD = \tfrac{1}{2}(4\,R - DMB) = 2\,R - \tfrac{1}{2}\,DMB$

$$\sphericalangle DEF = \tfrac{1}{2}\,DMF$$
$$\sphericalangle FAB = \tfrac{1}{2}\,FMB$$
$$\therefore \sphericalangle BCD + DEF + FAB = 2\,R.$$

Die Differenz der Summen je dreier abwechselnder Winkel

eines eingeschriebenen verschobenen Sechsecks mit einem convexen Winkel beträgt vier Rechte.



III. Ein überschlagenes Sechseck. Sind CDE, DEF und EFA convex, so ist

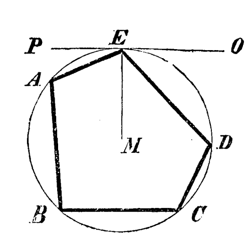
$$\sphericalangle\, ABC + \breve{CDE} + \breve{EFA} = 8\,R$$
$$\sphericalangle\, BCD + \breve{DEF} + FAB = 4\,R$$

In einem überschlagenen eingeschriebenen Sechsecke beträgt der Unterschied der Summen je dreier abwechselnder Winkel vier Rechte.

Zusatz 1. In einem eingeschriebenen einfachen $2n$ecke ist die Summe der n ungeraden Winkel der Summe der n geraden gleich.

Zusatz 2. In einem eingeschriebenen einfachen $2n$ecke beträgt die Summe der n ungeraden wie die der n geraden Winkel $(n - 2)\,R$.

L. N. M. Carnot stellte (Géométrie de pos. 304) die vorstehenden Sätze für einfache eingeschriebene $2\,n$ecke auf.



4. Ein eingeschriebenes $n$eck mit ungerader Eckenzahl lässt sich als eine Figur mit gerader Anzahl der Ecken betrachten, indem man eine Ecke als eine unendlich kleine Seitenstrecke ansieht, welche die Richtung der Tangente hat. Denn in der Bildung von Peripheriewinkeln stehen Sehnen und Tangenten einander gleich (§ 24; 1. 6. 7.).

In dem eingeschriebenen einfachen Fünfecke $ABCDE$ sei OP eine Tangente in E. Zieht man den Radius ME, so ist

$$\sphericalangle\, EAB + BCD + DEP = ABC + CDE + OEA = 4\,R.$$

Weil aber

$$\sphericalangle\, DEP = DEM + R,\ \text{und}\ \sphericalangle\, OEA = R + MEA$$
$$\therefore \sphericalangle\, EAB + BCD + DEM = ABC + CDE + MEA.$$

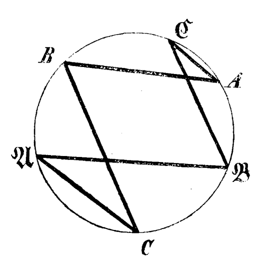
Wenn man in einem eingeschriebenen einfachen Fünfecke die Anzahl der Winkel dadurch auf sechs erhöht, dass man einen derselben durch einen Radius in zwei Theile zerlegt, so sind unter den nun vor-

handenen sechs Winkeln die beiden Summen aus je drei abwechselnden Winkeln einander gleich.

Zusatz. Wenn man einen der Winkel eines eingeschriebenen einfachen $(2n + 1)$ ecks durch einen Radius in zwei Theile zerlegt, so ist unter den nun vorhandenen $2n + 2$ hohlen Winkeln die Summe der $n + 1$ ungeraden der Summe der $n + 1$ geraden gleich.

L. N. M. Carnot: Géom. de pos. 304.

5. In dem eingeschriebenen Sechsecke $ABC\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ sei $AB \parallel \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $BC \parallel \mathfrak{B}\mathfrak{C}$. — Daher ist



Bogen $A\mathfrak{B} = \mathfrak{A}B$ \} (§ 25; 7. Zus. 3.)
„ $\mathfrak{B}C = B\mathfrak{C}$ \}
„ $AC = \mathfrak{A}\mathfrak{C}$
∴ „ $A\mathfrak{C} \parallel \mathfrak{A}C$ (§ 25; 7. Zus. 4.).

Wenn in einem eingeschriebenen Sechsecke unter den gegenüber liegenden Seitenstrecken zwei Paare parallel sind, so ist auch das dritte Paar parallel.

Gergonne: Ann. IV. p. 78.

Zusatz. Wenn in einem eingeschriebenen $(4n + 2)$ eck $2n$ Paare gegenüber liegender Seitenstrecken parallel sind, so ist auch das letzte Paar parallel.

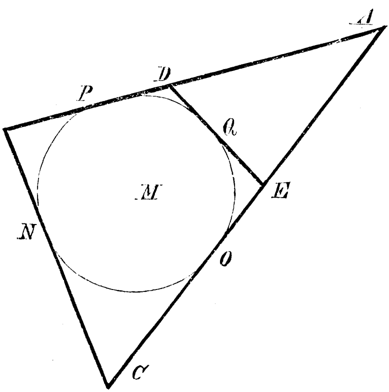
Möbius: Crelle's Journal 36 S. 316.

§ 27.

Die Centriwinkel in umgeschriebenen n ecken.

1. Ein Dreieck sei einem Kreise umgeschrieben. Wir unterscheiden zwei Fälle:

I. Das Dreieck ABC berühre den inneren Kreis um M in den Punkten N, O, P. Dann ist



$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle\, BMN = \frac{1}{2}\, PMN \\ \sphericalangle\, NMC = \frac{1}{2}\, NMO\end{array}\right\} (\S\ 25;\ 8)$$
$$\therefore \sphericalangle\, BMC = \frac{1}{2}\, PMO$$

II. Das Dreieck ADE berühre den äusseren Kreis um M in den Punkten Q, O, P. — Nun hat man

$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle\, DMQ = \frac{1}{2}\, PMQ \\ \sphericalangle\, QME = \frac{1}{2}\, QMO\end{array}\right\} (\S\ 25;\ 8)$$
$$\therefore \sphericalangle\, DME = \frac{1}{2}\, PMO.$$
$$\therefore \sphericalangle\, PMA = DME$$

Subtrahirt man

$$\sphericalangle\, PMD = DMQ,$$

so bleibt

$$\sphericalangle\, DMA = QME = \frac{1}{2}\, QMO.$$

In einem dem Kreise umgeschriebenen Dreiecke ist der einer Seitenstrecke gegenüber liegende Centriwinkel halb so gross wie der Centriwinkel, welcher auf dem von den Berührungspunkten der beiden andern Seitenstrecken begrenzten Bogen steht. Dieser Bogen kehrt der jener Seitenstrecke gegenüberliegenden Ecke im eingeschlossenen Kreise seine concave, im ausgeschlossenen seine convexe Seite zu, und schliesst den dritten Berührungspuukt ein oder aus, je nachdem derselbe auf der Seitenstrecke liegt oder nicht.

J. V. Poncelet: Traité des propriétés projectives des figures; Tome I. 462 (1865. Erste Ausgabe 1822).

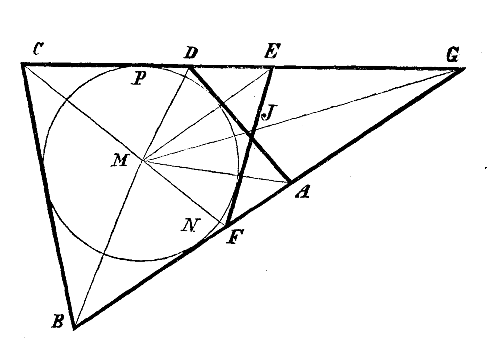
Bezeichnet man die Abschnitte der Seitenstrecken, welche zwischen den Ecken und den Berührungspunkten liegen, als Tangentenstrecken, so ergiebt sich:

Zus. 1. $\sphericalangle\, PMO + OMP = 4\,R;\ \therefore \sphericalangle\, BMC + OMA = 2\,R.$ In einem inneren Kreise ergänzen sich die beiden Centriwinkel zu zwei Rechten, von denen der eine einer Seitenstrecke, der andere einer davon getrennten Tangentenstrecke gegenüber liegt.

Zus. 2. Aus $\sphericalangle\, DME = \frac{1}{2}\, PMO$ folgt: $\sphericalangle\, DME = PMA.$ In einem äusseren Kreise sind die beiden Centriwinkel einander gleich, von denen der eine einer Seitenstrecke, der andere einer Tangentenstrecke gegenüber liegt, die mit jener Seitenstrecke keinen Endpunkt gemein hat.

2. Die Vorzeichen der Centriwinkel, welche den Seitenstrecken eines umgeschriebenen $n$ecks gegenüber liegen, ergeben

sich, wenn man eine um den Mittelpunkt sich drehende Gerade den Umfang des $n$ecks stetig durchlaufen lässt. Je nachdem so zwei Centriwinkel in gleichem Drehungssinne oder in entgegengesetztem durchlaufen werden, haben sie gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen.



Das Viereck $ABCD$ sei einem i n n e r n K r e i s e (um M) umgeschrieben. Alle den Seitenstrecken gegenüber liegenden Centriwinkel haben alsdann gleiche Vorzeichen. Sind N und P die Berührungspunkte der Seitenstrecken AB und CD, so ist

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle\ BMC = \tfrac{1}{2}\ NMP \\ \measuredangle\ DMA = \tfrac{1}{2}\ PMN\end{array}\right\}(1.)$$

$$\therefore \measuredangle\ BMC + DMA = \tfrac{1}{2}\ (NMP + PMN) = 2\,R.$$

Z w e i C e n t r i w i n k e l , w e l c h e i n e i n e m i n n e r e n K r e i s e d e n a b w e c h s e l n d e n S e i t e n s t r e c k e n e i n e s u m g e s c h r i e b e n e n V i e r e c k s g e g e n ü b e r l i e g e n , b e t r a g e n z u s a m m e n z w e i R e c h t e.

P o n c e l e t: Propriétés projectives 463.

3. In Vierecken, die einem ä u s s e r e n K r e i s e umgeschrieben sind, haben die den abwechselnden Seitenstrecken gegenüber liegenden Centriwinkel entgegengesetzte Vorzeichen.

I. In dem e i n f a c h e n Vierecke $AJEG$, auf dessen Seitenlinien GA und EG die Berührungspunkte N und P liegen, ist

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle\ NMG = FME \\ \measuredangle\ NMA = FMJ\end{array}\right\}(1.\ \text{Zus. } 2.)$$

$$\therefore \measuredangle\ AMG = JME \text{ oder } GMA + JME = 0.$$

II. In dem ü b e r s c h l a g e n e n Vierecke $ADEF$ ist

$$\measuredangle\ AMD = FME = \tfrac{1}{2}\ NMP\ (1.)$$

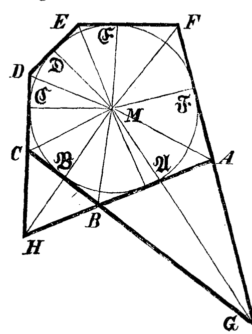
$$\therefore \measuredangle\ AMD = FME \text{ oder } AMD + EMF = 0$$

$$\measuredangle\ AME + EMD = FMA + AME$$

$$\therefore \measuredangle\ EMD = FMA \text{ oder } DME + FMA = 0.$$

D i e S u m m e d e r b e i d e n C e n t r i w i n k e l , w e l c h e i n

einem äusseren Kreise den abwechselnden Seitenstrecken eines umgeschriebenen Vierecks gegenüber liegen, ist null.



4. In dem einem inneren Kreise M umgeschriebenen hohlwinkligen Sechsecke $ABCDEF$ mit den Berührungspunkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ ist

$$\left.\begin{aligned} \sphericalangle AMB &= \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{F}M\mathfrak{B} \\ \sphericalangle CMD &= \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{B}M\mathfrak{D} \\ \sphericalangle EMF &= \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{D}M\mathfrak{F} \end{aligned}\right\} (1.)$$

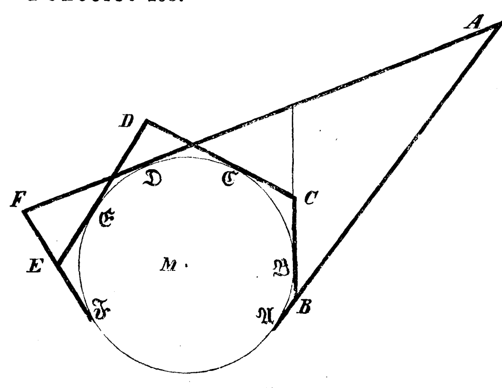
$$\therefore \sphericalangle AMB + CMD + EMF = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{F}M\mathfrak{B} + \mathfrak{B}M\mathfrak{D} + \mathfrak{D}M\mathfrak{F}) = 2R.$$

Ebenso ergiebt sich in dem Sechsecke $GBHDEF$, welches eine einspringende Ecke B hat:

$$\sphericalangle GMB = \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{F}M\mathfrak{A}$$
$$\sphericalangle HMD = \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{A}M\mathfrak{D}$$
$$\sphericalangle EMF = \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{D}M\mathfrak{F}.$$
$$\therefore \sphericalangle GMB + HMD + EMF = 2R.$$

Je drei Centriwinkel, welche in einem inneren Kreise den abwechselnden Seitenstrecken eines umgeschriebenen Sechsecks gegenüber liegen, betragen zusammen zwei Rechte.

Poncelet 463.



5. In dem einem äusseren Kreise M umgeschriebenen Sechsecke $ABCDEF$ ist (1.)

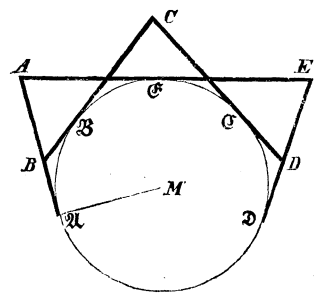
$$\sphericalangle AMB = \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{D}M\mathfrak{B}$$
$$\sphericalangle CMD = \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{B}M\mathfrak{E} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{B}M\mathfrak{D} + \mathfrak{D}M\mathfrak{E})$$
$$\sphericalangle EMF = \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{E}M\mathfrak{D};$$

$$\therefore \sphericalangle AMB + CMD + EMF = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{D}M\mathfrak{B} + \mathfrak{B}M\mathfrak{D} + \mathfrak{D}M\mathfrak{E} + \mathfrak{E}M\mathfrak{D}) = 0.$$

Die Summe der drei Centriwinkel, welche in einem äusseren Kreise den abwechselnden Seitenstrecken eines umgeschriebenen Sechsecks gegenüber liegen, ist null.

Zusatz. Die Summe der n Centriwinkel, welche in einem äusseren Kreise den abwechselnden Seitenstrecken eines umgeschriebenen $2n$ecks gegenüber liegen, ist null.

6. Die für das umgeschriebene $2n$eck entwickelten Sätze gelten auch für das umgeschriebene $(2n+1)$ eck, analog § 25; 6., wenn man den einer Seitenstrecke gegenüber liegenden Centriwinkel durch den nach dem Berührungspunkte gerichteten Radius in zwei Theile zerlegt, so dass dadurch die Anzahl der in Betracht zu ziehenden Centriwinkel auf eine gerade Anzahl steigt. Es soll dies an dem umgeschriebenen Fünfeck $ABCDE$ mit den Berührungspunkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, nachgewiesen werden. Durch den Radius $M\mathfrak{A}$ ist der Centriwinkel AMB in die Theile $AM\mathfrak{A} + \mathfrak{A}MB = AMB$ zerlegt. Es ist nun



$$\sphericalangle\ BMC = \tfrac{1}{2}\ \mathfrak{A}M\mathfrak{C} = \tfrac{1}{2}\ (\mathfrak{A}M\mathfrak{E} + \mathfrak{E}M\mathfrak{C})$$
$$\sphericalangle\ DME = \tfrac{1}{2}\ \mathfrak{C}M\mathfrak{E}$$
$$\sphericalangle\ AM\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}\ \mathfrak{E}M\mathfrak{A}$$
$$\therefore\ \sphericalangle\ BMC + DME + AM\mathfrak{A} = 0.$$

7. Wenn in dem Sechsecke $ABCDEF$ die Geraden AD und BE durch den Mittelpunkt des Kreises gehen, so ist

$$\sphericalangle\ AMB + BMC + CMD = 2R$$
$$\sphericalangle\ AMB + CMD + EMF = 2R$$
$$\therefore\ \sphericalangle\ BMC = EMF;$$

diese beiden Winkel sind also Scheitelwinkel.

Wenn in einem Sechsecke, das einem inneren Kreise umgeschrieben ist, zwei gegenüberliegende Ecken verbindende Diagonalen durch den Mittelpunkt gehen, so geht auch die Verbindungslinie des dritten Paares gegenüber liegender Ecken durch den Mittelpunkt.

Gergonne: Annales de Math. IV. p. 78.

Zus. 1. Die Summe der n Centriwinkel, welche in einem inneren Kreise den abwechselnden Seitenstrecken eines umgeschriebenen $2n$ ecks gegenüber liegen, ist zwei Rechte.

Poncelet: Propr. proj. I. 463.

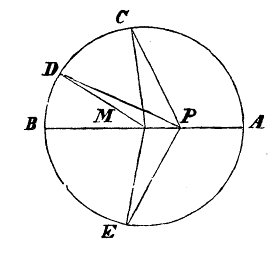
Zus. 2. Wenn in einem $(4n + 2)$ ecke, das einem inneren Kreise umgeschrieben ist, von den $2n + 1$ Paaren gegenüber liegender Ecken n Paare mittels Durchmesser verbunden sind, so geht auch die Verbindungslinie des übrigen Paares durch den Mittelpunkt.

§ 28.

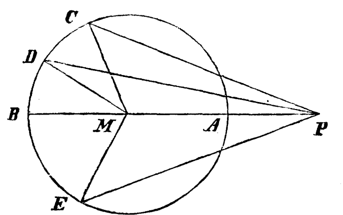
Bogen und Strecken.

1. Wir vergleichen zunächst die Abstände der Punkte eines Kreises von einem Punkte, dann die Sehnen.

2. Bei der Vergleichung der Strecken, welche zwischen den Punkten eines Kreises und einem festen Punkte liegen, sind drei Fälle zu unterscheiden: Der feste Punkt liegt entweder innerhalb des Kreises, ausserhalb desselben oder auf dem Kreise. In dem letzten Falle sind die zu vergleichenden Strecken Sehnen.

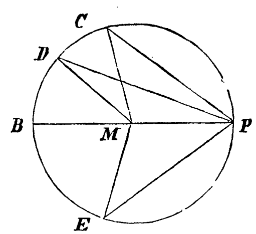


Von dem Punkte P, der nicht im Mittelpunkte des Kreises liegt, ist durch den Mittelpunkt M ein Durchmesser gezogen, dessen Gegenpunkte A und B sind.



Der beliebige Punkt C des Kreises ist mit M und P verbunden. Alsdann ist

$$PM + MC > PC \text{ (§ 17; 9.)}$$
$$PM + MC = PB$$
$$\therefore PB > PC.$$



Liegt P innerhalb des Kreises, so ist
$MP + PC > MC;\ MC = MP + PA$
$\therefore\ PC > PA.$

Wenn P ausserhalb des Kreises liegt, so hat man
$PC + CM > PM;\ PM = PA + AM$
$\therefore\ PC > PA.$

Von allen Verbindungslinien eines festen Punktes mit den Punkten eines Kreises ist diejenige die grösseste, welche durch den Mittelpunkt geht, — diejenige die kleinste, deren Verlängerung durch den Mittelpunkt geht.

3. Von P aus gerechnet sei B der fernste, A der nächste Punkt des Kreises, ferner Bogen $BE = BC$, Bogen $BC > BD$. Nun ist

$\sphericalangle\ EMB = BMC$ (§ 25; 3).
$\therefore \sphericalangle\ PME = PMC$
$\therefore\ PC = PE;\ \sphericalangle\ EPB = CPB$ (§ 20; 7.).

Wenn Bogen $BC > BD$ ist, so folgt
$\sphericalangle\ BMC > BMD$ (§ 25; 3. Zus.)
$\therefore \sphericalangle\ PMC < PMD$
$\therefore\ PC < PD$ (§ 19; 8.).

I. Zwei Verbindungslinien eines festen Punktes mit Punkten eines Kreises sind einander gleich, wenn die letzteren mit dem fernsten Punkte gleiche Bogen einschliessen.

II. Von zwei Verbindungslinien eines festen Punktes mit Punkten eines Kreises ist diejenige die grössere, deren Endpunkt mit dem fernsten Punkte den kleineren Bogen einschliesst.

Eukl. III; 7. 8.

Zus. 1. Ein Punkt, dessen Abstände von drei oder mehr Punkten eines Kreises einander gleich sind, ist der Mittelpunkt des Kreises.

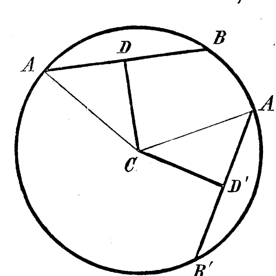
Eukl. III; 9.

Zus. 2. Von einem äusseren Punkte aus lassen sich zwei

Tangenten an einen Kreis legen, und es sind die von dem gemeinschaftlichen Punkte und den Berührungspunkten begrenzten Strecken derselben einander gleich.

Zus. 3. Unter allen Sehnen, die durch einen Punkt der Kreislinie gehen, ist der Durchmesser die grösseste; zwei andere sind einander gleich, wenn sie mit dem Durchmesser gleiche Winkel bilden; von zwei Sehnen ist diejenige die grössere, welche mit dem Durchmesser den kleineren Winkel bildet.

Clavius zu Eukl. III; 15.



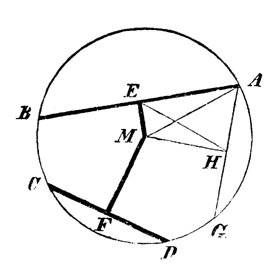
4. Fällt man aus dem Mittelpunkte C eines Kreises die Senkrechten CD, CD' auf die Sehnen AB, $A'B'$ und zieht die Radien CA, CA', so ist $AD = \frac{1}{2}\ AB$, $A'D' = \frac{1}{2}\ A'B'$ (§ 24; 7). Wenn nun noch entweder $CD = CD'$ oder $AB = A'B'$, so ist $CDA \cong CD'A'$ (§ 20; 9).

Im ersten Falle ist daher $AB = A'B'$, im zweiten $CD = CD'$.

I. Zwei Sehnen sind einander gleich, wenn sie gleiche Abstände vom Mittelpunkte haben.

II. Zwei Sehnen haben gleiche Abstände vom Mittelpunkte, wenn sie einander gleich sind.

Eukl. III; 14.



5. In dem Kreise um M seien die Sehnen AB, CD durch die vom Mittelpunkte auf sie gefällten Senkrechten ME, MF in E und F halbirt. — Zieht man von A aus eine Sehne $AG = CD$, welche in H durch die Senkrechte MH halbirt wird, so ist auch $MH = MF$. Es sei nun

I. $ME < MF$, mithin auch $ME < MH$. Dann ist
$\sphericalangle\ MHE < HEM$ (§ 19; 1); $\therefore \sphericalangle\ EHA > AEH$.
$\therefore AE > AH$ (§ 19; 2); $\therefore AB > CD$.

II. sei $AB > CD$, also auch $AE > AH$. Dann ist
$\sphericalangle\ EHA > AEH$ (§ 19; 1); $\therefore \sphericalangle\ MHE < HEM$.
$\therefore ME < MH$ (§ 19; 2); $\therefore ME < MF$.

I. Von zwei Sehnen eines Kreises ist diejenige die

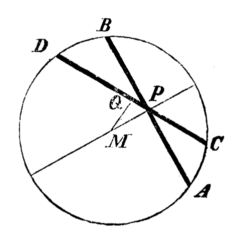
grössere, welche den kleineren Abstand vom Mittelpunkte hat.

II. Von zwei Sehnen hat die grössere den kleineren Abstand vom Mittelpunkte.

Zusatz. Von allen Sehnen eines Kreises ist der Durchmesser die grösste.

Eukl. III; 15.

6. Durch den, innerhalb des Kreises um M liegenden, Punkt P gehen die Sehnen AB, CD, unter denen AB auf dem durch P gehenden Durchmesser senkrecht steht.



Fällt man aus M die Senkrechte MQ auf CD, so ist $MQ < MP$, folglich $CD > AB$ (S. I.).

Von allen Sehnen, die durch einen Punkt innerhalb eines Kreises gehen, ist diejenige die kleinste, welche auf dem durch denselben Punkt gehenden Durchmesser senkrecht steht.

§ 29.

Bestimmung der Berührungspunkte auf umgeschriebenen $n$ecken.

1. Bezeichnung. Wenn ein $n$eck $ABC\ldots$ einem Kreise umgeschrieben ist, so sind je zwei in einer Ecke zusammenstossende Tangentenstrecken, welche von der Ecke und den benachbarten Berührungspunkten begrenzt werden, einander gleich (§ 28; 3. Zus. 2). Sie sollen durch den der Bezeichnung der Ecke entsprechenden kleinen Buchstaben ausgedrückt werden.

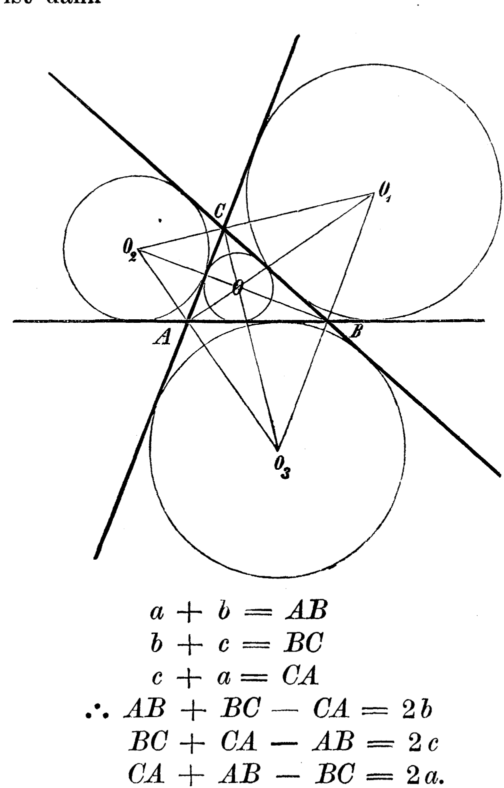
Liegt der Berührungspunkt der Seitenlinie AB auf der Strecke AB selbst, so ist $AB = a + b$, oder $AB - a - b = 0$. Befindet sich aber der Berührungspunkt auf der Verlängerung von AB über B hinaus, so ist $AB + b = a$, oder $a - b - AB = 0$. Im ersten Falle sind die Vorzeichen der Tangentenstrecken a und b dem von AB entgegengesetzt; im zweiten haben b und AB gleiche Vorzeichen. Allgemein sind mithin die

Vorzeichen einer Seitenstrecke und der auf derselben Seitenlinie befindlichen Tangentenstrecke gleich oder ungleich, je nachdem beide Strecken von der gemeinschaftlichen Ecke aus entgegengesetzte oder gleiche Richtung haben.

2. Unter den sieben Feldern, in welche die Ebene von den drei Seitenlinien eines Dreiecks zerlegt wird (§ 10; 1.), werden vier von je drei Seitenlinien eines Dreiecks begrenzt.

Die Seitenlinien eines Dreiecks können also vier Kreise berühren: einen inneren und drei äussere.

I. Das Dreieck ABC sei einem inneren Kreise umgeschrieben. — Es ist dann



$$a + b = AB$$
$$b + c = BC$$
$$c + a = CA$$
$$\therefore AB + BC - CA = 2b$$
$$BC + CA - AB = 2c$$
$$CA + AB - BC = 2a.$$

In einem Tangentendreiecke, welches einen inneren Kreis berührt, ist der Ueberschuss zweier Seitenstrecken über die dritte der Summe der Tan-

gentenstrecken an der Ecke gleich, an welcher jene beiden Strecken zusammentreffen.

Anmerk. Chr. Clavius schreibt (zu Eukl. IV; 4. [1589] S. 461) diesen Satz dem Giovanni Battista Benedetti (gest. 1590) zu.

II. Das Dreieck ABC berühre einen äusseren Kreis. Die Tangentenstrecken des Kreises, welcher die Seitenstrecke

BC von aussen berührt, seien a_1, b_1, c_1,
CA „ „ „ „ a_2, b_2, c_2,
AB „ „ „ „ a_3, b_3, c_3.

Man erhält nun: für den Kreis, welcher BC von aussen berührt:

$$a_1 - b_1 = AB$$
$$b_1 + c_1 = BC$$
$$a_1 - c_1 = CA$$
$$\therefore 2b_1 = BC + CA - AB$$
$$2c_1 = AB + BC - CA$$
$$2a_1 = AB + BC + CA;$$

für den Kreis, welcher CA von aussen berührt:

$$2b_2 = AB + BC + CA$$
$$2c_2 = AB - BC + CA$$
$$2a_2 = - AB + BC + CA;$$



für den Kreis, welcher AB von aussen berührt:

$$2b_3 = AB - BC + CA$$
$$2c_3 = AB + BC + CA$$
$$2a_3 = AB + BC - CA.$$

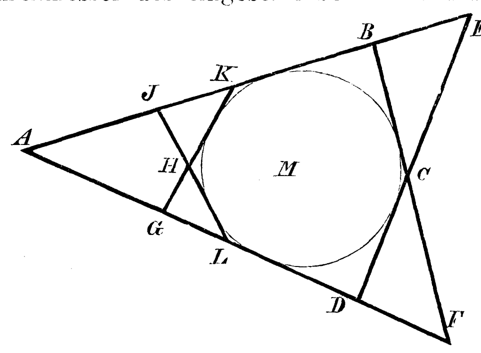
Beachtet man, was oben (1.) über die Vorzeichen gesagt wurde und ausserdem, dass die Seitenstrecken dieselben Vorzeichen wie die ihnen gegenüber liegenden Centriwinkel haben, also z. B. in Bezug auf den BC von aussen berührenden Kreis die Vorzeichen von AB und CA dem von BC entgegengesetzt sind; so ergeben sich die vorstehenden neun Gleichungen aus dem unter I. aufgestellten Satze.



Zus. 1. Es ist
$$\begin{aligned} a &= c_2 = b_3 \\ b &= c_1 = a_3 \\ c &= b_1 = a_2 \\ a_1 &= b_2 = c_3. \end{aligned}$$

Die beiden Berührungspunkte, welche auf einer Seitenstrecke, so wie die, welche auf den Verlängerungen derselben liegen, bestimmen mit den Ecken gleiche Tangentenstrecken.

Zus. 2. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Summe der den rechten Winkel einschliessenden Tangentenstrecken dem Durchmesser des eingeschriebenen Kreises gleich.



3. Ein dem Kreise M umgeschriebenes Viereck schliesst

I. den berührten Kreis ein. — In dem hohlwinkligen Vierecke $ABCD$ ist kürzer:

$$\begin{array}{l|l} b = AB - a & \quad b = AB - a \\ c = BC - b = BC - AB + a & - c = b - BC \\ d = CD - c = CD - BC + AB - a & \quad d = CD - c \\ a = DA - d = DA - CD + BC - AB + a; & - a = d - DA; \end{array}$$

$$\therefore\ AB + CD = BC + DA.$$

Ebenso erhält man für das Viereck $AECF$ mit einspringender Ecke:

$$AE + CF = CE + FA.$$

Wenn ein Tangentenviereck einen inneren Kreis berührt, so sind die Summen je zweier gegenüber liegender Seitenstrecken einander gleich.

II. Der berührte Kreis liegt ausserhalb des Tangentenvierecks. — In dem hohlwinkligen Tangentenvierecke $AGHJ$ ist

$$\begin{aligned} g &= a - AG \\ h &= g - GH \\ i &= h + HJ \\ a &= i + JA \end{aligned}$$

$$\therefore\ AG + GH = HJ + JA;\ AG - HJ = JA - GH.$$

In dem überschlagenen Vierecke $JKGL$ ist

$$k = i - JK$$
$$-g = k - KG$$
$$-l = GL - g$$
$$i = LJ - l;$$
$$\therefore\ JK + KG = GL + LJ;\ KG - LJ = GL - JK.$$

Beachtet man, dass die Seitenstrecken des Vierecks gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben, je nachdem die ihnen gegenüber liegenden Centriwinkel mit gleichen oder ungleichen Vorzeichen versehen sind, so ergiebt sich der Satz:

Wenn ein Tangentenviereck einen äusseren Kreis berührt, so ist die Summe zweier anstossender Seiten, denen Centriwinkel mit ungleichen Vorzeichen gegenüber liegen, der Summe der beiden übrigen gleich.

J. Steiner: Crelle's Journal Bd. 32 (1836) S. 305—310.

4. (Umkehrung von 3.) Wenn in einem Vierecke die Summe zweier Seitenstrecken der Summe der beiden übrigen gleich ist, so kann demselben ein Kreis eingeschrieben werden.

I. Dieser Kreis liegt innerhalb des Vierecks, wenn jede der gleichen Summen aus zwei gegenüber liegenden Seitenstrecken besteht. Denn, wäre $AB + CD = BC + DA$ in dem Vierecke $ABCD$, so giebt es einen Kreis, welcher AB, BC und CD von innen berührt (§ 24; 10). Wäre nun DA keine Tangente dieses Kreises, so ziehe man durch D eine Tangente, welche AB in A' schneidet und mit den drei übrigen Tangenten den Kreis umschliesst. Alsdann ist

$$AB + CD = BC + DA;$$
$$A'B + CD = BC + DA' \text{ (3.)}$$
$$\therefore\ AA' = DA - DA',$$

was unmöglich ist (§ 19; 3. Zus.).

II. Der eingeschriebene Kreis liegt ausserhalb des Vierecks, wenn zwei anstossende Seitenstrecken zusammen den übrigen gleich sind.

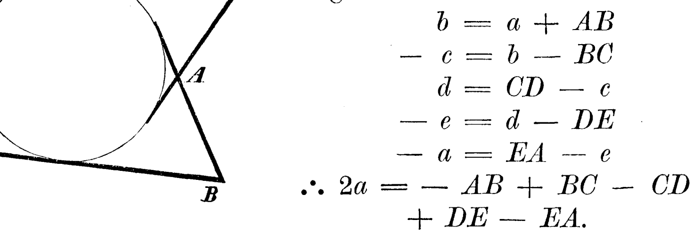
In dem überschlagenen Vierecke $JKGL$ sei $JK + KG = GL + LJ$. Schneiden JK und GL einander in A, so giebt es einen Kreis, welcher in dem Dreiecke AGK die Strecke GK von aussen, die Linien GA, AK von innen berührt. Wäre nun

LJ keine Tangente dieses Kreises, so ziehe man aus J eine Tangente, welche JK in L' schneidet und mit den drei übrigen den Kreis nicht einschliesst. Alsdann ist

$$JK + KG = GL + LJ;$$
$$JK + KG = GL' + L'J.$$
$$\therefore\ LL' = LJ - L'J,$$

was unmöglich ist (§ 19; 3. Zus.).

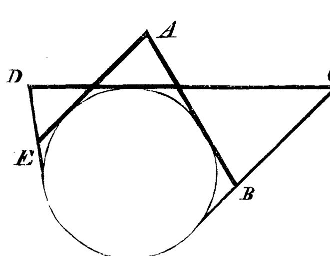
5. I. Das Fünfeck $ABCDE$ sei einem inneren Kreise umgeschrieben. — Es ergiebt sich



$$\begin{aligned} b &= a + AB \\ -\ c &= b - BC \\ d &= CD - c \\ -\ e &= d - DE \\ -\ a &= EA - e \\ \therefore\ 2a &= -\ AB + BC - CD \\ &\quad + DE - EA. \end{aligned}$$

Wenn ein Fünfeck einem inneren Kreise umgeschrieben ist, so ist der Unterschied aus den Summen der geraden und der ungeraden Seitenstrecken der Summe beider Tangentenstrecken an derjenigen Ecke gleich, in welcher zwei ungerade Strecken zusammentreffen.

Ist ein Fünfeck $ABCDE$ einem äusseren Kreise umgeschrieben, so erhält man



$$\begin{aligned} b &= AB - a \\ c &= b + BC \\ -\ d &= c - CD \\ -\ e &= DE - d \\ a &= EA - e. \end{aligned}$$

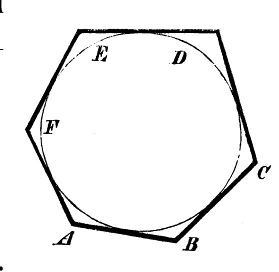
$$\therefore\ 2a = AB + BC - CD + DE + EA.$$

Aus der Gleichung für ein Fünfeck, welches einem inneren Kreise umgeschrieben ist, erhält man die vorstehende für ein einem äusseren Kreise umgeschriebenes Fünfeck geltende sofort, wenn man den Seitenstrecken des letzteren dieselben Vorzeichen giebt, welche den ihnen gegenüber liegenden Centriwinkeln zukommen, d. h. wenn man EA und AB negativ nimmt. Mit Be-

achtung dieser Regel für die Vorzeichen gilt also der oben ausgesprochene Satz für jedes umgeschriebene Fünfeck.

II. In einem umgeschriebenen $(2n+1)$ecke ist der Unterschied aus den Summen der geraden und der ungeraden Seitenstrecken der Summe beider Tangentenstrecken an derjenigen Ecke gleich, an welcher zwei ungerade Seitenstrecken zusammentreffen, vorausgesetzt, dass man den Seitenstrecken die Vorzeichen der ihnen gegenüber liegenden Centriwinkel giebt.

6. I. Das Sechseck $ABCDEF$ sei einem inneren Kreise umgeschrieben. — Nun ist



$b = AB - a;$	$-e = d - DE$
$-c = b - BC$	$f = EF - e$
$d = CD - c$	$-a = f - FA;$

$\therefore AB + CD + EF = BC + DE + FA.$

Für ein Sechseck, welches einem äusseren Kreise umgeschrieben ist, ändert sich die vorstehende Gleichung nur insofern, als die auf entgegengesetzten Seiten des Gebildes berührten Seitenstrecken (für welche die gegenüber liegenden Centriwinkel gegenwendig sind) entgegengesetzte Vorzeichen erhalten. Allgemein gilt demnach der Satz:

In einem umgeschriebenen Sechsecke sind die algebraischen Summen der geraden und der ungeraden Seitenstrecken einander gleich.

II. Allgemein: In einem umgeschriebenen $2n$eck sind die algebraischen Summen aus den geraden und den ungeraden Seitenstrecken einander gleich.

Anmerk. Unter den vorstehenden Sätzen wurden diejenigen, welche $n$ecke betreffen, die einem inneren Kreise umgeschrieben sind, von M. Pitot entdeckt: Mémoires de Paris (1725) p. 45—47.

§ 30.

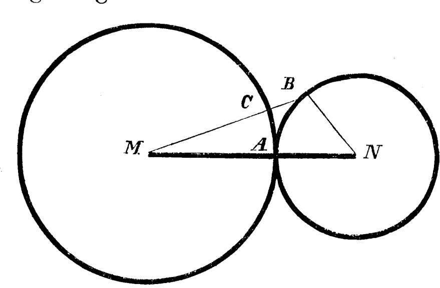
Mehrere Kreise.

1. Die Gerade, welche durch die Mittelpunkte zweier Kreise geht, wird ihre Centrale genannt. Dieselbe schneidet jeden der beiden Kreise in zwei Punkten (§ 24; 2).

Zwei Kreise lassen drei verschiedene Lagen unterscheiden. Sie haben nämlich entweder

I. einen Punkt der Centralen, oder
II. einen Punkt ausserhalb der Centralen, oder
III. keinen Punkt — gemein.

2. In zwei Kreisen, die einen Punkt der Centralen gemein haben, liegt dieser gemeinschaftliche Punkt entweder auf der von den beiden Mittelpunkten begrenzten Strecke, oder auf der Verlängerung derselben.



I. Die beiden Kreise um M und N mit den Radien r und ϱ haben den Punkt A der Centralen gemein, welcher zwischen M und N liegt, so dass

$$MN = MA + AN = r + \varrho. —$$

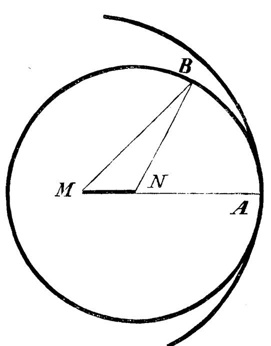
Verbindet man einen beliebigen Punkt B des Kreises um N mit M und N, so ist

$$MB + BN > MN \text{ (§ 19; 3)};$$
$$\therefore MB > MA, \text{ oder } MB > r.$$

B liegt also ausserhalb des Kreises um M (§ 6; 12. Zus. 2). Die beiden Kreise haben also ausser A keinen Punkt gemein, und es liegen alle übrigen Punkte des einen ausserhalb des andern. Man sagt in diesem Falle: Die beiden Kreise berühren einander von aussen.

Zwei Kreise berühren einander von aussen, wenn der Abstand ihrer Mittelpunkte der Summe ihrer Radien gleich ist.

II. Die Mittelpunkte M und N zweier Kreise, welche den Punkt A ihrer Centralen gemein haben, liegen auf einer Seite dieses Punktes, so dass (wenn $MA = r$, $NA = \varrho$) $MN = r - \varrho$ *ist.*



Verbindet man einen beliebigen Punkt B des Kreises um N mit M und N, so ist

$$MB < MN + NB \ (\S\ 19;\ 3);$$
$$MN + NB = MA = r;$$
$$\therefore MB < r.$$

Der Punkt B liegt also innerhalb des Kreises um M (§ 6; 12. Zus. 2). Die beiden Kreise haben demnach ausser A keinen Punkt gemein, und es liegt der Kreis um N innerhalb des Kreises um M.

Wenn zwei Kreise nur einen Punkt gemein haben und alle übrigen Punkte des einen innerhalb des andern liegen, so sagt man: sie berühren einander von innen.

Zwei Kreise berühren einander von innen, wenn der Abstand ihrer Mittelpunkte dem Unterschiede ihrer Radien gleich ist.

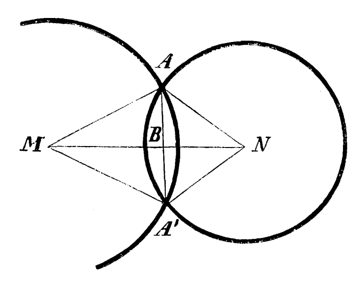
III. Aus den beiden vorstehenden Sätzen ergiebt sich allgemein:

Zwei Kreise berühren einander, wenn sie einen Punkt der Centralen gemein haben.

Pappos (aus Alexandrien, um 300 n. Chr. lebend. Hagen: Theonis fastos graecos pr. Amst. 1735. S. 320): Mathematicae collectiones VII; 99. 101.

Zusatz. Errichtet man in dem Punkte A eine Senkrechte auf der Centralen MN, so ist dieselbe eine Tangente beider Kreise (§ 24; 4). So ergiebt sich:

Wenn zwei Kreise einen Punkt der Centralen gemein haben, so werden sie in demselben von einer gemeinschaftlichen Tangente berührt.



3. Die beiden Kreise um M und N mit den Radien r und ϱ haben den ausserhalb der Centralen liegenden Punkt A gemein, so dass $MA + NA > MN$, oder $r + \varrho > MN$ ist. — Fällt man aus A die Senkrechte AB auf die Centrale und verlängert dieselbe um $BA' = AB$, so ist $\triangle MAB \cong MA'B$ und $\triangle NAB \cong NA'B$,

$$\therefore r = MA = MA'; \varrho = NA = NA'.$$

A' liegt also auch auf beiden Kreisen und $A'A$ ist eine gemeinschaftliche Sehne derselben. Hieraus folgt, dass von jedem Kreise Theile auf beiden Seiten der Sehne AA' liegen, die Kreise einander also in A und A' schneiden.

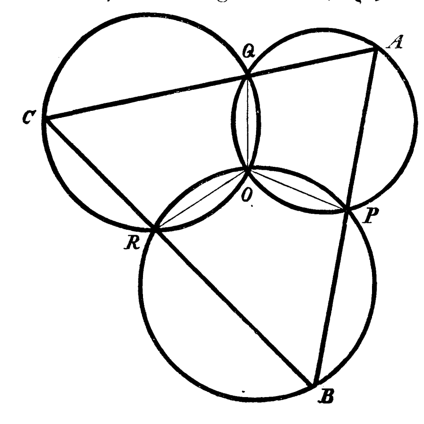
Zwei Kreise, welche einen ausserhalb der Centralen liegenden Punkt gemein haben, schneiden einander in diesem und einem zweiten Punkte; die Verbindungslinie beider Durchschnittspunkte ist eine beiden Kreisen gemeinschaftliche Sehne, welche von der Centralen senkrecht halbirt wird.

Chr. F. Pfleiderer: Scholien zu Euklid 3. Heft S. 18.

Zus. 1. Der Berührungspunkt zweier Kreise ist ein Punkt der Centralen.

Pappos: (Samml. 7. u. 8. Buch, griech. u. deutsch von C. J. Gerhardt. 1871) VII; 98. 100.

Zus. 2. Zwei Kreise mit den Radien r und ϱ schneiden einander, wenn zugleich $r + \varrho > MN$ und auch $r - \varrho < MN$ ist.



4. I. Drei Kreise schneiden einander paarweise in P, Q und R auf den Seitenstrecken AB, AC, BC eines Dreiecks. — Schneiden einander nun die beiden Kreise APQ und BRP ausserdem in O, so ist $\sphericalangle A + QOP = B + POR = 2R$ (§ 26; 1), folglich auch $\sphericalangle C + ROQ = 2R$. O liegt also auf dem Kreise QCR (§ 26; 2).

Wenn drei Kreise, welche durch die drei Ecken eines Dreiecks gehen, einander paarweise auf den Seitenstrecken schneiden, so gehen sie durch einen Punkt.

II. Umgekehrt: Drei Kreise gehen durch einen Punkt O und schneiden einander ausserdem paarweise in P, Q und R. — Zieht man durch P eine Gerade, welche von zwei Kreisen in A und B geschnitten wird, und treffen AQ und BR in C zusammen, so ist wiederum

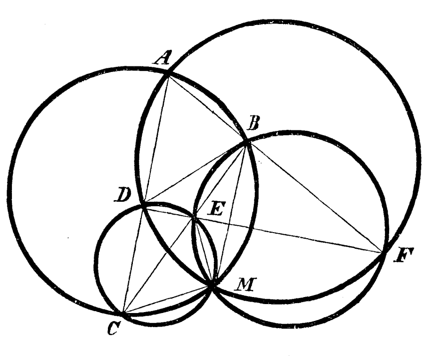
$$\sphericalangle A + QOP = B + POR,$$
$$\therefore \sphericalangle C + ROQ = 2R.$$

C liegt demnach auf dem Kreise ROQ.

Wenn drei Kreise durch einen Punkt O gehen, und man zieht aus einem beliebigen Punkte A des einen Kreises zwei Gerade durch die beiden andern Durchschnittspunkte P, Q desselben, welche von den andern Kreisen in B und C geschnitten werden, so geht die Gerade BC durch den letzten Kreisdurchschnitt R.

La Frémoire: Problèmes de géom. (1852) II; 11.

5. In einem vollständigen Vierseite $ABCDEF$ ist jedem der darin enthaltenen Dreiecke, ABC, AFD, BFE, DEC ein Kreis umgeschrieben. Von diesen vier Kreisen gehen drei durch die Ecken des Dreiecks ABC und schneiden einander paarweise auf den Seitenstrecken desselben in D, E, F. Diese drei Kreise



ADF, BEF, CED schneiden einander also in einem Punkte M (4. I.). Ebenso gehen die Kreise ABC, BFE, DEC durch die Ecken des Dreiecks AFD und schneiden einander paarweise in B, E, C; sie haben mithin ebenfalls einen Punkt gemein. Da nun zwei unter den drei letzten Dreiecken durch M gehen, so haben alle vier Kreise diesen Punkt gemein. — Oder: Schneiden einander die Kreise BEF und CDE in M, so ist

$$\sphericalangle\, CME + EDC = 2\,R$$
$$\sphericalangle\, EMF + FBE = 2\,R$$
$$\sphericalangle\, FBE = BAC + ACB$$
$$\therefore \sphericalangle\, CMD + DMF + BAC + ACB + EDC = 4\,R$$
$$\sphericalangle\, CMD = CED = BEF$$
$$\sphericalangle\, CMD + ACB + EDC = 2\,R$$
$$\therefore \sphericalangle\, DMF + FAD = 2\,R.$$

Durch A, D, M, F geht also ein Kreis u. s. w.

Die vier Kreise, welche den vier in einem vollständigen Vierseite enthaltenen Dreiecken umgeschrieben sind, schneiden einander in einem Punkte.

La Frémoire a. a. O. III; 51.

Zus. 1. Es ist

$$\sphericalangle\, MCA = MEF = MBF.$$
$$\sphericalangle\, MAC = MBC = MFD \text{ u. s. w.}$$

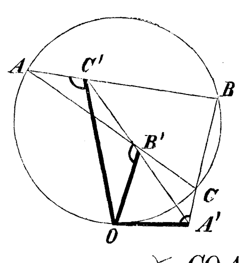
Die Verbindungslinien des Punktes M mit den Durchschnitten einer Seitenstrecke bilden mit den drei übrigen Seitenstrecken gleiche Winkel.

Zus. 2. Es ist

$$\sphericalangle\, AMD = AFD = BME$$
$$\sphericalangle\, BMA = BCA = EMD;$$

Ebenso $\sphericalangle\, CMD = CED = BEF = BMF;$
$$\sphericalangle\, CMB = DMF \text{ u. s. w.}$$

Je zwei gegenüber liegenden Seitenstrecken der in dem vollständigen Vierseite enthaltenen einfachen Vierecke liegen am Punkte M gleiche Winkel gegenüber.



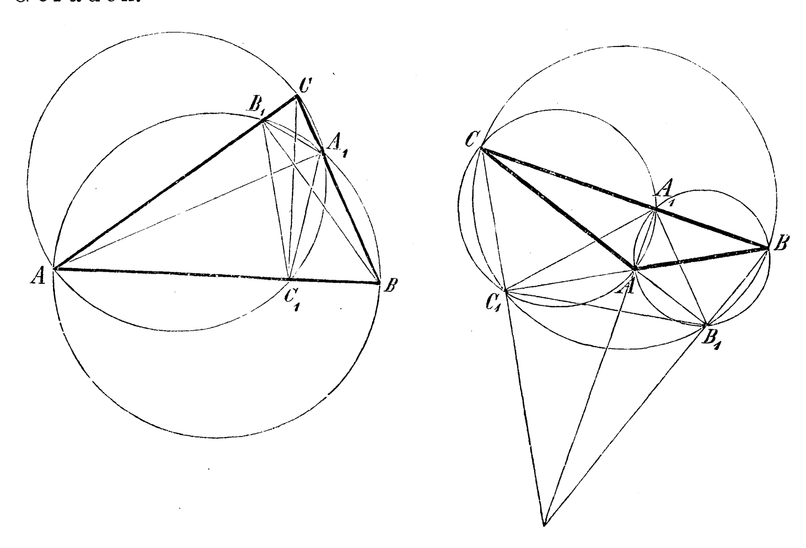
6. Von dem Punkte O auf einem Kreise seien nach den Seitenstrecken AB, BC, CA des eingeschriebenen Dreiecks ABC die Geraden OC', OA', OB', so gezogen, dass die gleichwendigen Winkel $OC'A$, $OA'C$, $OB'A$ einander gleich sind. — Dann sind die Vierecke $OA'CB'$, und $OB'C'A$ Sehnenvierecke (§ 25; 10. § 26; 2), mithin

$$\sphericalangle\, COA' = CB'A';\ \sphericalangle\, AOC' = AB'C';$$
$$\sphericalangle\, BAO + OCB = A'CO + OCB;$$
$$\therefore \sphericalangle\, C'AO = OCA';$$
$$\therefore \sphericalangle\, AOC' = COA'$$
$$\therefore \sphericalangle\, CB'A' = AB'C'.$$

Die Punkte A', B', C' liegen also auf einer Geraden.

Die Fusspunkte der drei Geraden, welche von einem Kreispunkte aus so nach den Seitenstrecken eines eingeschriebenen Dreiecks gezogen sind, dass sie mit diesen gleiche gleichwendige Winkel bilden, liegen auf einer Geraden.

Zus. Die Fusspunkte der von einem Kreispunkte aus auf die Seitenstrecken eines eingeschriebenen Dreiecks gefällten Senkrechten liegen auf einer Geraden.



7. In dem Dreiecke ABC sei $AA_1 \perp BC$, $BB_1 \perp CA$; AA_1 und BB_1 schneiden einander in O. — Verlängert man die Gerade CO bis zu ihrem Durchschnitte C_1 mit AB, so sind OA_1CB_1 und ABA_1B_1 Sehnenvierecke (§ 25; 10. § 26; 2). Daher ist

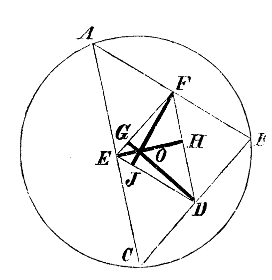
$$\sphericalangle B_1A_1C(B) = B_1OC = BOC_1$$
$$\sphericalangle AA_1B_1 = ABB_1$$
$$\sphericalangle AA_1B_1 + B_1A_1C(B) = R = BOC_1 + ABB_1$$
$$\therefore \sphericalangle CC_1B = R.$$

Man nennt eine Gerade, welche die Ecke eines Dreiecks mit der gegenüber liegenden Seitenlinie senkrecht verbindet, eine Höhe des Dreiecks.

Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden ein-

ander in einem Punkte, dem gemeinsamen Durchschnittspunkte der drei Kreise, welche je durch eine Ecke und die Fusspunkte der von den beiden andern Ecken auslaufenden Höhen gehen.

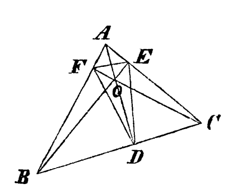
Archimedes: Lemmata, Satz 5. — Vgl. Pappos VII; 60.



Zusatz. Den Satz, „die drei Höhen eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkte", bewies K. F. Gauss (1810, in Schumacher's Uebersetzung von Carnot's Geometrie der Stellung, II. p. 363) auf folgende Art: In dem Dreiecke DEF seien DG, EH und FJ die Höhen. — Zieht man durch die drei Ecken Parallelen zu den gegenüber liegenden Seitenstrecken und schneiden einander diese Parallelen in A, B, C, so ist auch $DG \perp BC$, $EH \perp AC$, $FJ \perp AB$; ferner ist

$$DE = AF = FB; \; EF = BD = DC; \; FD = CE = EA.$$

Der Mittelpunkt des dem Dreiecke ABC umgeschriebenen Kreises liegt also in DG, in EH und in FJ (§ 24; 9); diese drei Geraden müssen daher einander in einem Punkte schneiden.



8. In dem Dreiecke ABC schneiden einander die drei Höhen AD, BE, CF in O (7.). — Nun sind die Vierecke $AFOE$, $BDOF$, $CEOD$, $ABDE$, $BCEF$, $CAFD$ Sehnenvierecke; daher ist

$$\sphericalangle\, CAB = BOF = BDF = EOC = EDC;$$
$$\sphericalangle\, FDA = FCA = ODE.$$

AD ist mithin die Halbirungslinie des Winkels FDE, und BC halbirt die beiden Nebenwinkel von FDE. Ebenso lässt sich zeigen, dass

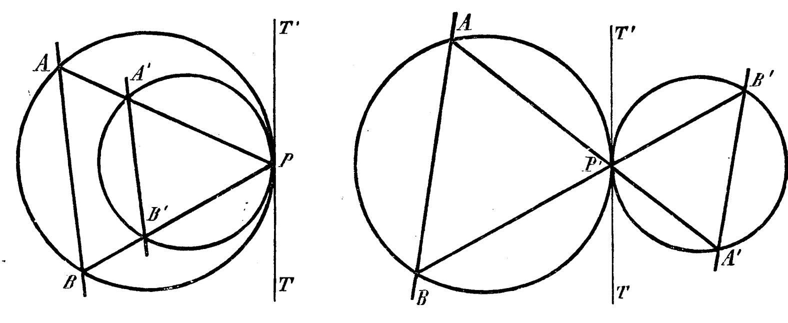
$$\sphericalangle\, ABC = CED = FEA,$$
$$\sphericalangle\, DEB = BEF,$$
$$\sphericalangle\, BCA = AFE = DFB,$$
$$\sphericalangle\, EFC = CFD \text{ ist.}$$

Die Punkte O, A, B, C sind also die Mittelpunkte der vier Kreise, welche dem Dreiecke DEF eingeschrieben sind (§ 24; 10).

Die Ecken eines Dreiecks und der Durchschnitt seiner Höhen sind die Mittelpunkte der vier Kreise, welche die drei Verbindungslinien der Höhenfusspunkte berühren.

K. W. Feuerbach: Geradliniges Dreieck (1822) § 24.

9. Durch den Berührungspunkt P zweier Kreise gehen zwei Gerade, welche ausser P den einen Kreis in A und B, den an-



dern in A' und B' schneiden. — Legt man durch P die gemeinschaftliche Tangente TT', so ist (§ 25; 7)

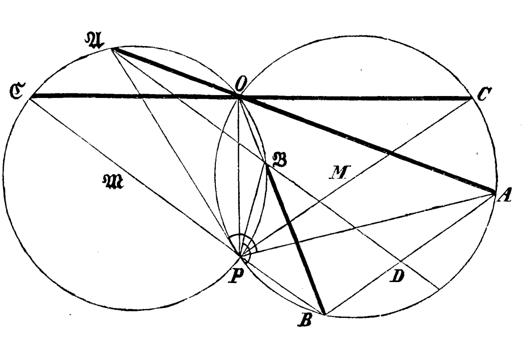
$$\sphericalangle\, APT' = ABP = A'B'P.$$

Also sind die Sehnen AB und $A'B'$ parallel.

Wenn zwei Gerade durch den Berührungspunkt zweier Kreise gehen, so sind die beiden von ihnen eingeschlossenen Sehnen parallel.

Pappos: Samml. VII; 102. 106.

10. Zwei Kreise um M und $\mathfrak{M}$ schneiden einander in O und P. Durch O gehen zwei Gerade, von denen die beiden Kreise die Strecken $A\mathfrak{A}$, $B\mathfrak{B}$ abschneiden, deren Endpunkte die Sehnen AB, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ verbinden. — Verbindet man die Endpunkte der Strecken $A\mathfrak{A}$, $B\mathfrak{B}$ mit P und bezeichnet den Durchschnittspunkt der (nöthigenfalls verlängerten) Sehnen AB, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ durch D, so ist



$$\sphericalangle\ AOB + BO\mathfrak{A} = BO\mathfrak{A} + \mathfrak{A}P\mathfrak{B}$$
$$\therefore\ \sphericalangle\ AOB = APB = \mathfrak{A}P\mathfrak{B}.$$

Den Sehnen AB und $\mathfrak{AB}$ liegen also am Punkte P gleiche Winkel gegenüber. Ferner ist

$$\sphericalangle\ \mathfrak{B}PA + APB = \mathfrak{A}P\mathfrak{B} + \mathfrak{B}PA, \text{ oder}$$
$$\sphericalangle\ \mathfrak{B}PB = \mathfrak{A}PA.$$

Den Strecken $\mathfrak{A}A$ und $\mathfrak{B}B$ liegen mithin am Punkte P ebenfalls gleiche Winkel gegenüber.

Allen Strecken, welche von zwei Kreisen auf den durch ihren einen Durchschnittspunkt gehenden Geraden abgeschnitten werden, liegen an dem andern Durchschnittspunkte gleiche Winkel gegenüber.
A. F. Möbius: Statik 118.

Zus. 1. Zieht man von P aus durch M und $\mathfrak{M}$ die Durchmesser PC und $P\mathfrak{C}$, ferner OC und $O\mathfrak{C}$, so ist

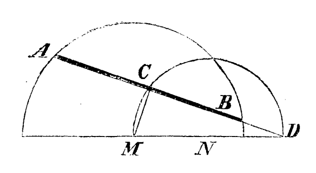
$$\sphericalangle\ COP = PO\mathfrak{C} = R,$$

mithin ist $CO\mathfrak{C}$ eine Gerade. $\sphericalangle\ CP\mathfrak{C} = AP\mathfrak{A}$.

Zieht man von dem einen Durchschnitte zweier Kreise die beiden Durchmesser, so liegen die beiden andern Endpunkte derselben mit dem zweiten Durchschnitte der Kreise auf einer Geraden.
G. W. Krafft: Instit. geom. sublim. (1753) § 64.

Zus. 2. Es ist $\sphericalangle\ \mathfrak{A}PO = \mathfrak{AB}O$

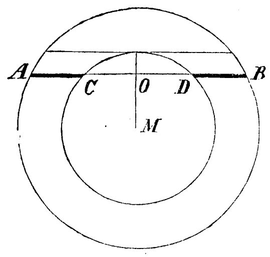
$$\sphericalangle\ OPA = OBA$$
$$\therefore\ \sphericalangle\ \mathfrak{A}PA = \mathfrak{AB}O + OBA = \mathfrak{A}DA.$$



11. Der Mittelpunkt M eines Kreises liege auf einem zweiten Kreise, der um N mit dem Radius MN beschrieben ist. Die Centrale schneide den Kreis um N zum zweiten Male in D, und es gehe durch D eine Gerade, welche den Kreis um N in C, den Kreis um M in A und B schneidet. — Nun ist $\sphericalangle\ MCD = R$ (§ 25; 6. Zus. 1), mithin ist $AC = CB$ (§ 24; 7. I.).

Die Sehne eines Kreises wird durch einen zweiten Kreis halbirt, der durch den Mittelpunkt des ersteren und durch den Durchschnitt der Sehne (oder ihrer Verlängerung) und der Centralen geht.
Pappos: Samml. VII; 91.

Anmerk. Der Punkt D kann ausserhalb des Kreises um M, innerhalb desselben oder auf demselben liegen.



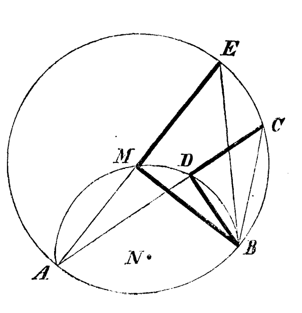
12. Um den Punkt M seien zwei (concentrische) Kreise beschrieben. Eine beliebige Gerade schneide den äusseren Kreis in A und B, den inneren in C und D. — Fällt man aus M eine Senkrechte MO auf AB, so ist (§ 24; 7. I.)

$$AO = OB$$
$$CO = OD$$
$$\therefore AC = DB;\ AD = CB.$$

Zwei concentrische Kreise schneiden auf einer Geraden zwei gleiche Strecken ab.

Zusatz. Berührt die Gerade AB in O den inneren Kreis, so ist $AO = OB$.

Pappos: Samml. VII; 77—79.



13. Von zwei Kreisen, die ein ander in A und B schneiden, gehe der eine, mit dem Centrum N, durch den Mittelpunkt M des andern. Aus A ist ferner der Durchmesser AE und eine Sehne AC des Kreises M gezogen; AC schneide den Kreis um N in D. — Dann ist (§ 25; 7)

$$\sphericalangle AMB = ADB;$$
$$\sphericalangle AEB = ACB.$$

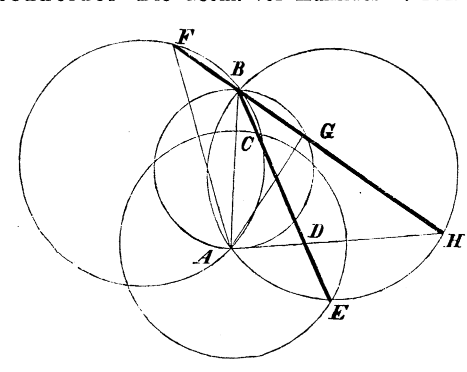
Ferner ist $$\sphericalangle MEB = EBM;$$
$$\therefore \sphericalangle EBM = CBD = DCB.$$
$$\therefore DB = DC.$$

Umgekehrt, wenn zwei Peripheriewinkel ADB, AMB in einem Kreise auf demselben Bogen AB stehen, und man verlängert den nach dem einen Endpunkte A des Bogens gehenden Schenkel eines jeden um den andern Schenkel, so liegen die neuen Endpunkte C, E auf einem zweiten Kreise.

Zusatz. Da $AM = MB$, $AM + MB = AE$, und $AE > AC$ ist, so ist auch $AM + MB > AD + DB$.

Von allen Peripheriewinkeln, die in einem Kreise auf demselben Bogen stehen, hat der gleichschenklige die grösseste Schenkelsumme.

Serenus (etwa zwei Jahrh. v. Chr.): De sectione coni 46. 47. — Bretschneider: Die Geom. vor Euklides S. 184.



14. Zwei Kreise mit mit gleichen Radien schneiden einander in A und B. Durch B sei eine Gerade gezogen, welche die erwähnten Kreise in F und H, einen dritten über AB als Durchmesser beschriebenen Kreis in G schneidet. — Nun ist

$\sphericalangle\ AFH = AHF$ (§ 25; 7); $\therefore\ AF = AH$;
$\sphericalangle\ AGB = R$ (§ 25; 6. Zus. 1); $\therefore\ FG = GH$.

Geht eine Gerade durch einen Schnittpunkt zweier gleicher Kreise, so wird die von diesen Kreisen begrenzte Strecke derselben durch einen dritten Kreis halbirt, welcher die gemeinschaftliche Sehne der beiden ersten zum Durchmesser hat.

Zusatz. Beschreibt man um A einen beliebigen Kreis, welcher die beiden gleichen in den von B ungleich weit entfernten Punkten C und E schneidet, so liegen B, C und E auf einer Geraden. — BE schneide den Kreis über AB in D etc.

Gregorius a Sancto Vincentio: Opus geom. quadr. circ. (1647) III. pr. 1. 2.

Viertes Hauptstück:

Die Affingleichheit.

§ 31.

Einleitung.

1. Zwei Gebilde heissen affingleich (≥), wenn sie auf einem Strahlbündel so liegen können, dass die perspectivisch entsprechenden Geraden auf demselben Strahle, welcher die „Axe der Affingleichheit" genannt wird, einander schneiden.

Anmerk. Den Namen dieser Verwandtschaft der Gebilde und das Zeichen ≥ gab J. H. T. Müller an: Geom. I. (1844) S. 193. Seine Definition stimmt mit derjenigen überein, welche A. F. Möbius für „gleiche" Figuren und Punktsysteme feststellte: Barycentr. Calcul (1827) § 161. Letztere ist umfassender als die oben gegebene Erklärung, aber nicht rein geometrisch.

2. Ist ein Gebilde auf einem Strahlbündel gegeben, so kann man behufs der Herstellung eines zweiten perspectivischen und affingleichen Gebildes nur eine Seitenstrecke desselben willkürlich annehmen. Denn der Durchschnitt dieser Strecke mit der ihr entsprechenden bestimmt die Lage der Axe, und also auch sämmtliche Durchschnitte entsprechender Strecken.

3. Aus dem Begriffe der Congruenz (§ 17; 1) ergiebt sich mittelst § 20; 10: Wenn von den drei Gebilden A, B, C

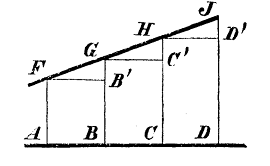
$$A \cong B;\ B \geq C;\ \therefore\ A \geq C.$$

§ 32.

Zwei affingleiche Punktreihen.

1. Zwei Punktreihen sind stets affingleich, wenn sie perspectivisch auf einem Strahlbündel liegen (§ 31; 1).

2. Eine Punktreihe bestimmt auf einer Geraden die gleichen Strecken $AB = BC = CD..$, und es sind durch die Punkte A, B, C, $D..$ parallele Gerade gezogen, welche eine andere Gerade in F, G, H, J treffen. — Zieht man von den letzteren Punkten aus parallel zu AD die Strecken FB', GC',

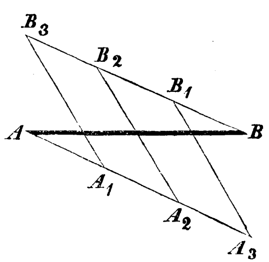


HD', deren Endpunkte B', C', D' bezüglich auf BG, CH, DJ liegen, so ist

$$AB \# FB',\ BC \# GC',\ CD \# HD' \ (\S\ 18;\ 6);$$

$$\therefore \triangle FB'G \cong GC'H \cong HD'J \ (\S\ 20;\ 8);\ \therefore FG = GH = HJ.$$

Wenn ein Strahlbündel auf der einen von zwei geschnittenen Geraden gleiche Strecken abschneidet, so sind auch die Theilstrecken auf der andern gleich.



Zus. 1. Um eine Strecke AB in eine ganze Anzahl n gleicher Theile zu zerlegen, zieht man von A und B aus zwei parallele, aber entgegengesetzt gerichtete Gerade und schneidet auf jeder derselben $n - 1$ gleiche Strecken ab: $AA_1 = A_1A_2 = A_3A_3 = .. = BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = ..$ Dann sind die Verbindungslinien derjenigen Theilpunkte, deren Zeigersumme n beträgt, parallel (also für $n = 4$: $A_1B_3 \parallel A_2A_2 \parallel A_3B_1$.). Es wird also durch sie AB in n gleiche Theile zerlegt.

Clavius: zu Eukl. I; 40. — VI; 10.

Zus. 2. Wenn s eine Strecke (Fläche), b eine begrenzte Linie (Fläche), n eine ganze Zahl bezeichnet, und es ist

$$b = n \,.\, s,$$

so wird s ein Mass von b genannt. Bedeutet c eine andere begrenzte Linie (Fläche), m eine ganze Zahl, und es ist

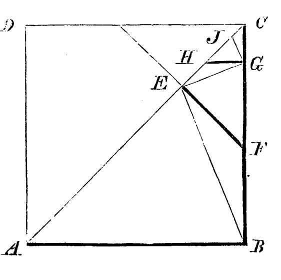
$$c = m \,.\, s,$$

so heisst s das gemeinschaftliche Mass von b und c.

Zwei Linien (Flächen) heissen commensurabel oder incommensurabel, je nachdem sie ein gemeinschaftliches Mass haben oder nicht.

Hieraus folgt, dass das Verhältniss zweier commensurabeler Linien (Flächen) durch eine rationale Zahl ausgedrückt werden kann, und dass zwei solche Grössen commensurabel sind, wenn ihr Verhältniss rational ist. Das Verhältniss incommensurabeler Linien (Flächen) lässt sich demnach nicht durch rationale Zahlen ausdrücken, und es müssen solche Grössen incommensurabel sein, wenn ihr Verhältniss irrational ist.

Dass es incommensurabele Linien giebt, soll hiernach an einem Beispiele nachgewiesen werden.



Es sei $ABCD$ ein Quadrat. Auf der Diagonale AC schneide man $AE = AB$ ab, errichte in E auf AC eine Senkrechte, welche BC in F schneidet, mache auf FC dann $FG = FE$ und errichte in G auf BC eine Senkrechte, welche AC in H trifft, mache auf HC demnächst $HJ = HG$, und so ohne Ende fort. Zieht man nun BE, EG und GJ, so ist

$$\sphericalangle ABE = BEA; \therefore \sphericalangle EBF = FEB$$
$$\sphericalangle FGE = GEF; \therefore \sphericalangle EGH = HEG.$$

Die Dreiecke ABC, FEC und HGC sind rechtwinklig und gleichschenklig. Darnach hat man

$$BF = FE = FG = EC$$
$$EH = HG = GC = HJ.$$

Setzt man $AC = d$, $AB = a$, $EC = r_1$, $GC = r_2$, $JC = r_3$, so wird

$$d = a + r_1;\ a = 2r_1 + r_2$$
$$r_1 = 2r_2 + r_3;\ r_2 = 2r_3 + r_4 \text{ u. s. w.}$$

$$\therefore \frac{d}{a} = 1 + \frac{r_1}{a}$$

$$\frac{a}{r_1} = 2 + \frac{r_2}{r_1};\ \therefore \frac{r_1}{a} = \frac{1}{2 + \frac{r_2}{r_1}}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = 2 + \frac{r_3}{r_2};\ \therefore \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{2 + \frac{r_3}{r_2}} \text{ u. s. w.}$$

$$\therefore \frac{d}{a} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{r_2}{r_1}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{r_3}{r_2}}} \text{ u. s. w.}$$

Bezeichnet man den Werth des unendlichen Kettenbruchs

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

durch x, so hat man bekanntlich

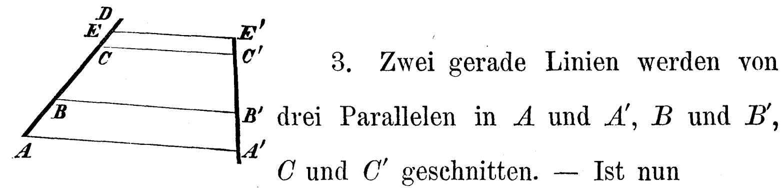
$$x = \frac{1}{2 + x}, \text{ also } x^2 + 2x = 1$$

$$x = -1 + \sqrt{2}$$

$$\therefore \frac{d}{a} = 1 + x = \sqrt{2}$$

Diagonale und Seitenstrecke eines Quadrats sind incommensurabel.

Eukl. X; 117. — Van Swinden: Elem. d. Geom. III; 126.



3. Zwei gerade Linien werden von drei Parallelen in A und A', B und B', C und C' geschnitten. — Ist nun

I. das Verhältniss der Strecken AB und BC in ganzen Zahlen gegeben, nämlich $AB : BC = m : n$, wo m und n ganze Zahlen bezeichnen, so theile man AB in m, BC in n gleiche Theile und ziehe durch die Theilpunkte Parallelen zu AA'. Dadurch werden auch $A'B'$ und $B'C'$ in m und n gleiche Theile zerlegt (2.), so dass sich ergiebt

$$AB : BC = A'B' : B'C'.$$

II. Das Verhältniss $AB : BC$ sei nicht in ganzen Zahlen gegeben. Wäre nun die vorstehende Gleichung nicht mehr richtig, sondern

$$AB : BD = A'B' : B'C',$$

so theile man AB und ihre Verlängerung bis gegen D von A aus in gleiche Theile, jeder kleiner als CD. Es wird dann mindestens ein Theilpunkt E zwischen C und D fallen. Zieht man von E nach $A'C'$ die Gerade $EE' \parallel AA'$, so ist (I.)

$$AB : BE = A'B' : B'E',$$

und nach Annahme $AB : BD = A'B' : B'C'$,

$$\therefore BD : BE = B'C' : B'E'.$$

Diese Gleichung ist jedoch unmöglich, weil die eine Seite grösser als 1, die andere kleiner als 1 ist. Also ist auch in diesem Falle

$$AB : BC = A'B' : B'C';$$

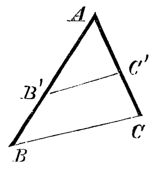
oder: $AB : A'B' = BC : B'C'$;

oder: $AC : BC = A'C' : B'C'$.

Zwei Gerade werden von einem Strahlbündel unter proportionirten entsprechenden Strecken geschnitten.

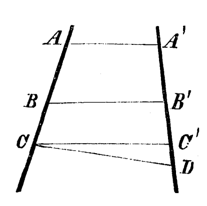
Tacquet (1654) zu Eukl. VI; 2.

Zus. 1. Zwei Seitenstrecken eines Dreiecks ABC werden durch eine zur dritten BC parallel laufende Gerade $B'C'$ in proportionirte Theile zerlegt.



Eukl. VI; 2.

4. Zwei Punktreihen ABC, $A'B'C'$ liegen so, dass $AB : BC = A'B' : B'C'$ und $AA' \parallel BB'$ ist. — Wäre nun CC' nicht parallel zu AA', sondern die von C nach $A'B'$ gezogene Gerade CD parallel zu AA', so hätte man (3.)



$$AB : BC = A'B' : B'D,$$
und nach Annahme $AB : BC = A'B' : B'C'$
$$\therefore B'C' = B'D.$$

Der Punkt D fällt also mit C' zusammen.

Werden zwei Gerade von drei andern, unter denen zwei parallel sind, unter proportionirten Strecken geschnitten, so ist auch die dritte den beiden andern parallel.

Zus. 1. Werden zwei Seitenstrecken AB, AC eines Dreiecks durch zwei Punkte B', C' in proportionirte Strecken getheilt ($AB' : B'B = AC' : C'C$), so ist die Gerade $B'C'$ zwischen den Theilpunkten der dritten Seitenstrecke parallel.

Eukl. VI; 2.

Zus. 2. Die Verbindungslinie der Mitten zweier Seitenstrecken eines Dreiecks ist der dritten parallel.

Zus. 3. Die Mittelpunkte der Seitenstrecken eines Vierecks sind die Ecken eines Parallelogramms.

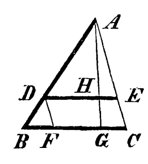
De la Hire: Propr. des Trapèzes. 1713 (Mém. de Paris 1716).

Zus. 4. In einem vollständigen Vierecke schneiden einander die drei Verbindungslinien zwischen den Mittelpunkten der gegenüber liegenden Seitenstrecken in einem Punkte.

Gergonne, Ann. I. p. 313.

Zus. 5. Werden zwei Gerade von mehreren andern, unter denen zwei parallel sind, in zwei Punktreihen so geschnitten, dass

die zwischen gleichgeordneten Punkten liegenden Strecken proportionirt sind, so sind alle schneidenden Linien parallel.



5. In dem Dreiecke ABC sei parallel zu BC eine Gerade gezogen, welche die Punkte D und E auf AB und AC verbindet. — Zieht man von D nach BC die Gerade $DF \parallel AC$, so ist

$$BA : DA = BC : FC \ (3);$$
$$DE = FC \ (\S\ 18;\ 6);$$
$$\therefore BA : DA = BC : DE.$$

Zwei parallele Verbindungslinien der Schenkel eines Winkels verhalten sich wie die von ihren Endpunkten und dem Scheitel begrenzten Strecken auf jedem Schenkel.

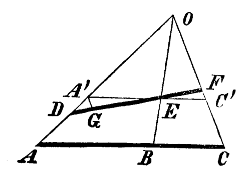
Zusatz. Zieht man von A aus eine Gerade, welche BC in G, DE in H schneidet, so ist

$$AG : AH = BG : DH;\ AG : AH = GC : HE;$$
$$\therefore BG : DH = GC : HE,$$

also auch $$BG : GC = DH : HE.$$

Zwei Parallelen werden von drei durch einen Punkt gehenden Geraden unter proportionirten Strecken geschnitten.

F. Commandino: Apollonii Conica (1566).



6. Zwei nicht parallele Gerade werden von drei durch einen Punkt O gehenden in A und D, B und E, C und F geschnitten.

Zieht man durch E eine Linie parallel zu AC, welche OA in A', OC in C' schneidet, sowie durch A' parallel zu OC die Linie $A'G$, welche DF in G trifft, so ist

$$AB : BC = A'E : EC' \ (5.\ \text{Zus.})$$
$$A'E : EC' = GE : EF \ (3.)$$
$$DE > GE;$$
$$\therefore DE : EF > AB : BC.$$

Zwei nicht parallele Gerade werden von drei durch einen Punkt gehenden nicht unter proportionirten Strecken geschnitten.

Zusatz. Zwei Gerade sind parallel, wenn sie von drei durch einen Punkt gehenden Geraden unter proportionirten Strecken geschnitten werden.

7. In dem Trapeze $ABCD$ sei $AB \parallel CD$; AD und BC schneiden einander in O, und es seien die parallelen Seitenlinien AB und CD in E und F so getheilt, dass $AE : EB = DF : FC$ ist. — Trifft die Verlängerung von EO die Linie CD in G, so ist

$$AE : EB = DG : GC \text{ (5. Zus.).}$$

Da aber auch $AE : EB = DF : FC$ ist,

$$\therefore DG : GC = DF : FC.$$

Addirt man 1, so ergiebt sich

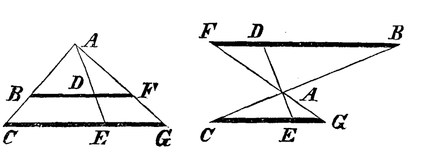
$$DC : GC = DC : FC;$$
$$\therefore GC = FC.$$

Der Punkt G fällt also mit F zusammen.

Werden die parallelen Seitenstrecken eines Trapezes von den Endpunkten einer dritten Seitenstrecke aus in proportionirte Strecken getheilt, so geht die Verbindungslinie der Theilpunkte durch den Durchschnitt der nicht parallelen gegenüber liegenden Seitenstrecken.

Pappos: Samml. VIII; 4.

8. Es liegen die drei Punkte A, B, C auf einer Geraden. Von B und C gehen zwei parallele Strecken BD, CE aus, für welche die Gleichung $BD : CE = AB : AC$ gilt, und welche auf derselben oder verschiedenen Seiten von BC liegen, je nachdem B und C auf derselben oder verschiedenen Seiten von A sich befinden. — Zieht man durch A eine Gerade, die BD in F, CE in G schneidet, so ist $AB : AC = BF : CG$ (5.)



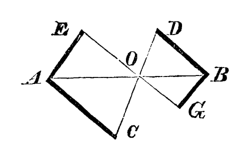
$$\therefore BF : CG = BD : CE.$$

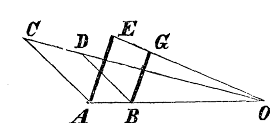
Die Punkte A, D und E liegen demnach auf einer Geraden (6.).

Wenn A, B, C drei Punkte einer Geraden sind, von welcher die parallelen Strecken BD, CE auf derselben oder auf verschiedenen Seiten der Linie BC

ausgehen, je nachdem B und C auf derselben oder auf verschiedenen Seiten von A sich befinden; und wenn $AB : AC = BD : CE$ ist: so liegen A, D, E auf einer Geraden.

F. Commandino: Archimedis de iis, quae vehuntur in aqua, libri duo. 1565. — R. Simson: Sect. Conic. libri V. (Edinb. 1750) II; 10. Lemma 1.





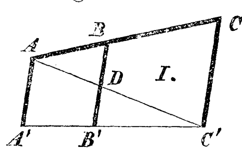
9. Wenn aus zwei Punkten A, B zwei Paar Parallelstrecken, $AC \parallel BD$ und $AE \parallel BG$ gezogen sind, für welche die Gleichung $AC : BD = AE : BG$ gilt, und wenn die Strecken des zweiten Paares auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten der Geraden AB liegen, je nachdem dies bei den Strecken des ersten der Fall ist, so treffen die Geraden AB, CD, EG in einem Punkte zusammen.

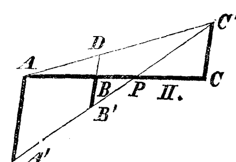
R. Simson a. a. O. Lemma 2.

Denn, treffen AB und CD in O zusammen, so ist (5.)

$$OA : OB = AC : BD = AE : BG.$$

EG geht also durch O (8).





10. Zwei Gerade werden von drei Parallelen in A und A', B und B', C und C' geschnitten. — Zieht man AC', und trifft diese Linie BB' in D, so ist (5.)

$$BD : CC' = AB : AC$$
$$DB' : AA' = DC' : AC' = BC : AC$$
$$\therefore AC \,.\, BD = AB \,.\, CC'$$
$$AC \,.\, DB' = BC \,.\, AA'.$$

Die Summe der beiden letzten Gleichungen ist

$$AC \,.\, BB' = AB \,.\, CC' + BC \,.\, AA'.$$

Diese Gleichung gilt ohne Weiteres, falls AA', BB' und CC' gleiche Richtung haben (I.). Wenn aber AC und $A'C'$ einander auf der Strecke BC schneiden (II.), so ist die Richtung von CC

den Richtungen der Strecken AA' und BB' entgegengesetzt und man hat die Gleichung

$$BC \,.\, AA' = AB \,.\, C'C + AC \,.\, BB'.$$

Zus. 1. Ist P der Durchschnitt von AC und $A'C'$, und man lässt A mit P zusammenfallen, so ergiebt sich

$$PC \,.\, BB' = PB \,.\, CC'.$$

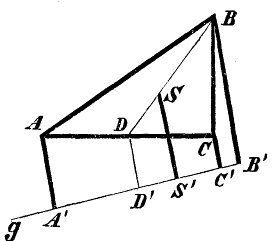
Wenn aber B mit P zusammenfällt, so hat man

$$PC \,.\, AA' = AP \,.\, CC'.$$

Zus. 2. Ist B die Mitte von AC und es haben die Strecken AC und $A'C'$ keinen Punkt gemein, so wird

$$BB' = \frac{AA' + CC'}{2}.$$

11. In dem Dreiecke ABC sei D die Mitte von AC und es liegt S auf BD so, dass $DS : SB = 1 : 2$ ist. Zieht man nach einer beliebigen Geraden g die Parallelen AA', BB', CC', DD', SS', so ist



$$DD' = \frac{AA' + CC'}{2} \quad (10.\ \text{Zus. } 2.)$$

$$SS' = \frac{2\,DD' + BB'}{3} \quad (10.)$$

$$\therefore\ SS' = \frac{AA' + BB' + CC'}{3}.$$

Der Punkt S, dem die durch die vorstehende Gleichung ausgedrückte Eigenschaft zukommt, heisst der Schwerpunkt des Dreiecks ABC.

S. Lhuilier: Polygonométrie (1789) § 36. 37.

12. Ist a eine Strecke, b eine beliebige begrenzte Linie, m eine Zahl und $\frac{b}{a} = m$, so heisst der Ausdruck

$$m \,.\, a$$

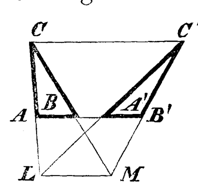
die Länge der Linie b für das Mass (die Längeneinheit) a, m ihre Längenzahl. So sagt man: eine Linie ist 7 Meter lang — wenn 7 die Längenzahl, und 1 Meter die Längeneinheit darstellt.

§ 33.

Affingleiche Gebilde zwischen zwei Parallelen.

1. Wenn in einem Dreiecke eine Seitenstrecke und die ihr gegenüber liegende Ecke, oder in einem Vierecke zwei gegenüber liegende Seitenstrecken auf zwei parallelen Geraden liegen, so heisst jede auf einer Parallelen befindliche Seitenstrecke eine Grundlinie, und der Abstand derselben von der gegenüber liegenden Parallelen die zu der Grundlinie gehörige Höhe des Gebildes. In einem Dreiecke kann daher jede Seitenstrecke als Grundlinie, der Abstand derselben von der durch die Spitze gehenden Parallelen als die zugehörige Höhe betrachtet werden. In einem Parallelogramme und in einem Trapeze kann man je zwei parallele Seitenstrecken als Grundlinien, ihren Abstand (§ 19; 2. Zus. 3) als zugehörige Höhe ansehen.

Zwei Dreiecke, Parallelogramme oder Trapeze mit gleichen Höhen können stets perspectivisch zwischen zwei Parallelen liegen, deren Abstände ihren Höhen gleich sind. Zwei Dreiecke oder Vierecke, die perspectivisch zwischen zwei Parallelen liegen, lassen sich immer als gleichwendig auffassen.



2. Zwei gleichwendige Dreiecke, ABC und $A'B'C'$ liegen perspectivisch zwischen zwei Parallelen AA' und CC', so dass ihre entsprechenden Seitenlinien AC und $A'C'$ in L, BC und $B'C'$ in M auf der Axe der Affingleichheit der Dreiecke zusammentreffen (§ 31; 1). — Man kann nun AB und $A'B'$ als die Grundlinien beider Dreiecke betrachten, die dann in der Höhe, dem Abstande der Parallelen, übereinstimmen.

Nun ist
$$\left.\begin{aligned} CA : CL &= AB : LM \\ C'B' : C'M &= A'B' : LM \end{aligned}\right\} \text{§ 32; 5.}$$
$$CA : CL = C'B' : C'M \quad (\text{§ 32; 3})$$
$$AB = A'B'.$$

Wenn zwei affingleiche Dreiecke perspectivisch zwischen zwei Parallelen liegen können, so haben sie gleiche Grundlinien und Höhen.

Zusatz. Wenn zwei Dreiecke LMC und LMC' die Grundlinie LM gemein haben, und es finden sich die derselben gegen-

über liegenden Ecken auf einer zur Grundlinie parallelen Geraden CC', so werden sie von jeder dritten Parallelen unter gleichen Strecken $AB = A'B'$ geschnitten.

3. Zwei gleichwendige Dreiecke, ABC und $A'B'C'$ (Fig. unter 2.) mit gleichen Grundlinien $AB = A'B'$ liegen perspectivisch zwischen zwei Parallelen, so dass auf einer derselben die Grundlinien sich befinden. — Die beiden Dreiecke haben also gleiche Grundlinien und Höhen. Ferner ist

$$AB + BA' = BA' + A'B', \text{ oder } AA' = BB'.$$

Treffen AC und $A'C'$ in L, BC und $B'C'$ in M zusammen, so ist

$$\left.\begin{array}{l} CC' : AA' = CL : AL \\ CC' : BB' = C'M : B'M \end{array}\right\} \text{§ 32; 5.}$$

$$CL : AL = C'M : B'M;$$

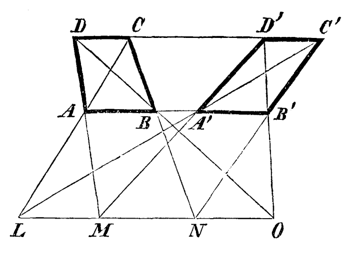
$$\therefore LM \parallel AA' \parallel CC' \text{ (§ 32; 4).}$$

Für die Dreiecke ABC, $A'B'C'$ ist also LM die Axe der Affingleichheit.

I. Liegen zwei Dreiecke mit gleichen Grundlinien und Höhen perspectivisch zwischen zwei Parallelen, so haben sie eine Axe der Affingleichheit. — Nach Nr. 1. gilt daher auch der Satz:

II. Zwei Dreiecke mit gleichen Grundlinien und Höhen sind affingleich.

4. Die gleichwendigen Vierecke (Parallelogramme oder Trapeze) $ABCD$ und $A'B'C'D'$ liegen perspectivisch zwischen zwei Parallelen AA', DD' und es seien die derselben Parallelen angehörigen Seitenstrecken einander gleich: $AB = A'B'$, $CD = C'D'$. — Treffen die entsprechenden Linien AC und $A'C'$ in L, AD und $A'D'$ in M, BC und $B'C'$ in N, BD und $B'D'$ in O zusammen, so haben die Dreiecke ACD und $A'C'D'$, ABC und $A'B'C'$, ADB und $A'D'B'$, BCD und $B'C'D'$ bezüglich die Geraden LM, LN, MO, NO zu Axen der Affingleichheit (3.). Die Punkte L, M, N, O liegen also auf einer Geraden, welche AA' und DD' parallel ist, welche mithin die Axe der Affingleichheit für die Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ darstellt.



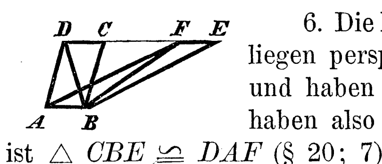
I. Liegen zwei Parallelogramme oder Trapeze mit entsprechend gleichen Grundlinien und Höhen perspectivisch zwischen zwei Parallelen, so haben sie eine Axe der Affingleichheit.

Da nun zwei Parallelogramme oder Trapeze mit gleichen Grundlinien und Höhen stets zwischen zwei Parallelen perspectivisch liegen können (1.), so ergiebt sich:

II. Zwei Parallelogramme oder Trapeze mit gleichen Grundlinien und Höhen sind affingleich.

5. Die Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ (Fig. unter 4.), welche zwischen zwei Parallelen AA' und DD' perspectivisch liegen, haben eine Axe der Affingleichheit, auf welcher sich die entsprechenden Geraden AC und $A'C'$ in L, AD und $A'D'$ in M, BC und $B'C'$ in N, BD und $B'D'$ in O schneiden. — Da nun die Dreiecke ABC und $A'B'C'$, wie ACD und $A'C'D'$ bezüglich gleiche Grundlinien haben, $AB = A'B'$, $CD = C'D'$ (2.), so besitzen die Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ gleiche Grundlinien und Höhen.

Wenn zwei Parallelogramme oder Trapeze perspectivisch zwischen zwei Parallelen liegen und eine Axe der Affingleichheit haben, so sind ihre in derselben Parallelen befindlichen Grundlinien wie ihre Höhen einander gleich (4.).



6. Die Parallelogramme $ABCD$ und $ABEF$ liegen perspectivisch zwischen zwei Parallelen und haben die Grundlinie AB gemein. — Sie haben also auch gleiche Höhen (1.). Ferner ist $\triangle\ CBE \cong DAF$ (§ 20; 7)

$$\therefore\ \overline{CBE} = \overline{DAF} \text{ (§ 20; 10)}$$
$$\therefore\ \overline{ABED} - \overline{CBE} = \overline{ABED} - \overline{DAF},$$
oder
$$\overline{ABCD} = \overline{ABEF}.$$

I. Zwei Parallelogramme mit gemeinschaftlicher Grundlinie und perspectivisch zwischen zwei Parallelen liegend, haben gleiche Flächen.

Eukl. I; 35.

Da aber alle Parallelogramme mit gleichen Grundlinien und Höhen perspectivisch zwischen zwei Parallelen so liegen können, dass sie die Grundlinie gemein haben, so gilt auch der allgemeinere Satz:



II. Zwei Parallelogramme mit gleichen Grundlinien und Höhen haben gleiche Flächen.

Th. Simpson: Elements of Geometrie (1760) II; 2. Coroll. 2. — Eukl. I; 36.

Zusatz. Zieht man die Diagonalen BD, BF, so ist

$$\underline{ABD} \cong \underline{CDB};\ \underline{ABF} \cong \underline{EFB};$$
$$\therefore\ \overline{ABD} = \tfrac{1}{2}\ \overline{ABCD};\ \overline{ABF} = \tfrac{1}{2}\ \overline{ABEF};$$
$$\therefore\ \overline{ABD} = \overline{ABF}.$$

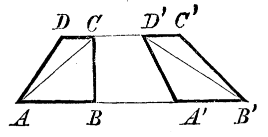
I. Die Fläche eines Parallelogramms ist doppelt so gross wie die eines Dreiecks von gleicher Grundlinie und Höhe.

Eukl. I; 41.

II. Zwei Dreiecke mit gleichen Grundlinien und Höhen haben gleiche Flächen.

Eukl. I; 37. 38. — Th. Simpson a. a. O.

7. Die Trapeze $ABCD$ und $A'B'C'D$ haben entsprechend gleiche parallele Seitenstrecken (Grundlinien) $AB = A'B'$, $CD = C'D'$ und gleiche Abstände derselben (Höhen). — Zieht man die Diagonalen BD und $B'D'$, so ist

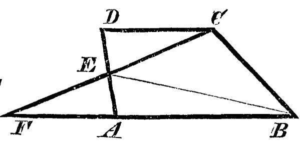


$$\overline{ABD} = \overline{A'B'D'} \text{ und } \overline{BCD} = \overline{B'C'D'} \text{ (6. Zus. II.)}$$
$$\therefore\ \overline{ABCD} = \overline{A'B'C'D'}.$$

Zwei Trapeze mit gleichen Grundlinien und Höhen haben gleiche Flächen.

Clavius zu Eukl. I; 40.

8. In dem Trapeze $ABCD$ sei $AB \parallel CD$. — Halbirt man AD in E und zieht die Gerade CE, welche BA in F schneidet, so ist



$$\underline{CDE} \cong \underline{FAE};\ \therefore\ CD = FA,\ CE = FE$$
$$\overline{FBC} = \overline{ABCD}.$$

Betrachtet man in dem Dreiecke FBC die Strecke FB als Grundlinie, so hat es mit dem Trapeze gleiche Höhe. Da nun ferner $FB = AB + CD$ ist, so ergiebt sich:

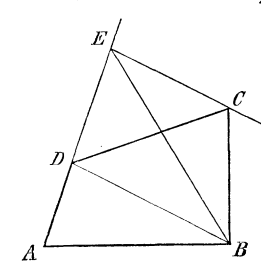
Ein Trapez und ein Dreieck haben bei gleichen Höhen gleiche Flächen, wenn die Grundlinie des

Dreiecks der Summe aus den Grundlinien des Trapezes gleich ist.

Zusatz. Zieht man BE, so ist

$$\overline{BCE} = \overline{BEF}$$
$$\therefore\ \overline{BCE} = \tfrac{1}{2}\,\overline{ABCD}.$$

Proklos zu Eukl. I; 41 (Baroc. pag. 255. 256).



9. Zieht man in dem Vierecke $ABCD$ die Diagonale BD, dann durch C parallel zu BD eine Gerade, welche die Linie AD in E trifft, und zuletzt BE, so ist

$$\overline{BCD} = \overline{BED}\ \text{(6. Zus.)}$$
$$\therefore\ \overline{ABCD} = \overline{ABE}.$$

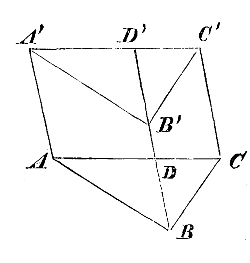
Jedes Viereck lässt sich in ein gleichflächiges Dreieck verwandeln, mit welchem es eine Seitenstrecke und einen derselben anliegenden Winkel gemein hat.

Diesen Satz benutzte Euklides in seinem Buche über „die Theilung der Figuren" (περὶ διαιρέσεων): Machometis Bagdadini de superficiorum divisionibus liber, Joh. Dee Londinensis et F. Commandini opera latine edit. Pesaro 1570. — L. F. Ofterdinger: Beiträge zur Wiederherstellung der Schrift des Euklides über die Theilung der Figuren (Ulm 1853) Satz 17.

Anmerk. Auf gleiche Art lässt sich jedes $n$eck in ein gleichflächiges Dreieck verwandeln.

§ 34.

Summirung der Flächen von zwei Parallelogrammen oder Dreiecken.

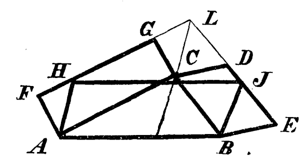


1. Zwischen drei gleichen und gleichgerichtet parallelen Strecken AA', BB', CC' liegen die drei Parallelogramme $ABB'A'$, $BCC'B'$, $ACC'A'$ so, dass jene Strecken die Grundlinien derselben bilden. — Schneidet die mittlere BB' unter den drei parallelen Strecken die Geraden AC in D, $A'C'$ in D', so ist

$$\left.\begin{aligned}\overline{ABB'A'} &= \overline{ADD'A'}\\ \overline{BCC'B'} &= \overline{DCC'D'}\end{aligned}\right\}\ \S\ 33;\ 6.\quad \therefore\ \overline{ABB'A'} + \overline{BCC'B'} = \overline{ACC'A'}.$$

Liegen drei Parallelogramme zwischen drei gleichen und parallelen Strecken, so ist die Fläche des Parallelogramms zwischen den beiden äusseren Parallelen der Summe aus den Flächen der beiden übrigen Parallelogramme gleich.

2. Ueber den Seitenstrecken eines Dreiecks ABC seien drei Parallelogramme errichtet, und zwar über BC und CA die beliebigen Parallelogramme $BCDE$ und $CAFG$, über AB das Parallelogramm $ABJH$, von dessen Ecken J auf DE und H auf FG liegt. Letzteres erhält man, indem man DE und FG bis zu ihrem Durchschnitte L verlängert und durch A und B parallel zu CL die Geraden AH und BJ zieht, weil CL ‡ AH ‡ BJ ist (§ 18; 6).



Nun ist

$$\left.\begin{aligned}\overline{ACLH} &= \overline{ACGF}\\ \overline{CBJL} &= \overline{CBED}\end{aligned}\right\}\ \S\ 33;\ 6$$

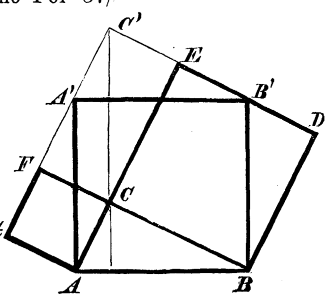
$$\overline{ABJH} = \overline{ACLH} + \overline{CBJL}\ (1.)$$

$$\therefore\ \overline{ABJH} = \overline{ACGF} + \overline{CBED}.$$

Errichtet man über zwei Seitenstrecken eines Dreiecks ABC zwei beliebige Parallelogramme so, dass die von ihrer gemeinsamen Ecke C und dem Durchschnitte L der äusseren Parallelen begrenzte Strecke CL hinreichend verlängert die dritte Seitenstrecke des Dreiecks schneidet: so ist die Summe ihrer Flächen der Fläche eines über der dritten Seitenstrecke des Dreiecks errichteten Parallelogramms gleich, dessen zweite Seitenstrecke mit der erwähnten Strecke CL nach Grösse und Richtung übereinstimmt.

Pappos: Math. Collect. IV; (Commandino Fol 37)

3. Ueber den Katheten BC und CA des rechtwinkligen Dreiecks ABC seien die Quadrate $BCED$ und $CFGA$ errichtet. Die Verlängerungen von DE und FG treffen in C' zusammen. Parallel zu CC' sind aus A und B Gerade gezogen, welche GC' in A', DC' in B' schneiden. — Alsdann ist



$$A'C' = AC = AG;\ B'C' = BC = A'G$$
$$\therefore\ A'B'C' \cong ABC \cong AA'G.$$
$$\therefore\ A'B' = AA';\ \sphericalangle\ A'AB = CAG = 90^{0}.$$

Das Parallelogramm $ABB'A'$ ist mithin ein Quadrat und

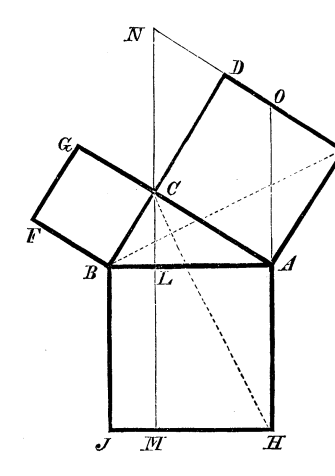
$$\overline{ABB'A'} = \overline{BDEC} + \overline{CFGA}\ (2.).$$

Die Fläche des Quadrats über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist der Summe aus den Flächen der Quadrate über den Katheten gleich.

Eukl. I; 47.

Die Entdeckung dieses Satzes wird von alters her dem Pythagoras zugeschrieben. Er wird darum auch der Pythagoreische Lehrsatz genannt.

Proklos: Baroc. p. 268.



Zweiter Beweis: Ueber den drei Seitenstrecken des bei C rechtwinkligen Dreiecks ABC seien die Quadrate $AHJB$, $BFGC$, $CDEA$ beschrieben. — Von C aus fälle man eine Senkrechte CL auf AB und verlängere sie bis zum Durchschnitte M mit HJ und N mit DE. Die Verlängerung von HA treffe DE in O. Dann ist

$$AE = AC \text{ und } \sphericalangle\ OAE = BAC,$$
$$\therefore\ AOE \cong ABC;$$
$$\therefore\ AO = AB = AH.$$
$$\overline{ACDE} = \overline{ACNO} = \overline{AHML}.$$

Ebenso zeigt man, dass

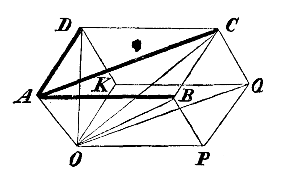
$$\overline{CBFG} = \overline{LMJB}.$$

Dritter Beweis, nach Euklides: Zieht man in der letzten Figur BE und CH, so ist

$$BAE \cong HAC,$$
$$\overline{BAE} = \tfrac{1}{2}\ \overline{CAED};\ \overline{HAC} = \tfrac{1}{2}\ \overline{HALM}\ (\S\ 33;\ 6.\ \text{Zus.})$$
$$\therefore\ \overline{HALM} = \overline{AEDC} \text{ u. s. w.}$$

Zusatz: In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Quadratfläche über einer Kathete der Fläche des Rechtecks zwischen der Hypotenuse und dem darauf durch die Höhe gebildeten anliegenden Abschnitte gleich.

4. Von den Ecken des Parallelogramms $ABCD$ aus seien vier gleiche und gleichgerichtete Strecken $AO \mathrel{\#} BP \mathrel{\#} CQ \mathrel{\#} DK$ gezogen, zwischen denen vier Parallelogramme liegen. — Zieht man AC und OQ, so ist



$$\overline{OACQ} = \overline{OABP} + \overline{PBCQ} \; (1.)$$
$$OADK \cong PBCQ$$
$$\therefore \overline{OACQ} = \overline{OABP} + \overline{OADK}.$$

Zieht man OB OC und OD, so ist

$$\overline{OAC} = \overline{OAB} + \overline{OAD}.$$

Zus. 1. Liegt O auf der Diagonale AC, so ist $\overline{OAC} = 0$,

$$\therefore \overline{OAB} = \overline{ODA}.$$

Zus. 2. Liegt O auf der Geraden AD, so ist $\overline{OAD} = 0$,

$$\therefore \overline{OAC} = \overline{OAB}.$$

Varignon: Mém. de Paris (1719), p. 66—70.

§ 35.

Affingleiche Gebilde zwischen drei und mehr Parallelen.

1. Zwei Dreiecke sind affingleich, wenn sie auf einem Strahlbündel perspectivisch so liegen können, dass ihre entsprechenden Seitenlinien einander in drei Punkten desselben Strahles schneiden (§ 31; 1). Es ist also zu ermitteln, unter welchen Bedingungen drei Punkte eines Dreiecks auf einer Geraden liegen.

Das Dreieck ABC werde von einer Geraden (Querlinie, Transversalen) in D, E, F auf BC, AC, AB geschnitten. — Zieht man durch B zu AC eine Parallele, welche DE in G trifft, so ist



$$\left.\begin{aligned} DB : DC &= BG : CE \\ FB : FA &= BG : AE \end{aligned}\right\} \text{§ 32; 5.}$$

$$\therefore \frac{DB}{DC} \cdot \frac{FA}{FB} = \frac{AE}{CE};$$

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = -1,$$

kürzer bezeichnet: $(AF \,.\, BD \,.\, CE) = -1$.

In dieser Gleichung ist das Streckenverhältniss auf einer Seitenlinie positiv oder negativ, je nachdem der Durchschnitt auf der Seitenstrecke selbst oder auf ihrer Verlängerung liegt.

Das Produkt aller drei Streckenverhältnisse heisst ein Dreieckschnittsverhältniss, insofern es zusammengesetzt ist aus den Verhältnissen, nach denen jede Seitenstrecke eines Dreiecks durch einen beliebigen Punkt — der auf ihr selbst oder auf ihrer Verlängerung liegt — geschnitten wird, wenn man den Anfangs- und Endpunkt derselben zum End- und Anfangspunkte der anstossenden Seitenstrecken nimmt.

A. F. Möbius: Barycentr. Calcul (1827) § 215.

Die obige Endgleichung drückt nun folgenden Satz aus:

Ein Dreieck wird von jeder Geraden nach einem Dreieckschnittsverhältnisse geschnitten, dessen Werth der negativen Einheit gleich ist.

Seinem wesentlichen Inhalte nach wird dieser Satz zuerst in der „Sphärik" des Menelaos (um 98 n. Chr.) erwähnt, in der vorliegenden Gestalt kommt er in dem „Barycentr. Calcul" von Möbius § 198 vor.

Zus. 1. Aus einer der beiden Gleichungen

$$AE = EC$$
$$AF : FB = CD : BD$$

folgt nach dem Hauptsatze die andere.

Halbirt eine Gerade eine Seitenstrecke eines Dreiecks, so schneidet sie die beiden andern nach entgegengesetzt gleichen Verhältnissen — und umgekehrt.

Zus. 2. Ist die Querlinie eines Dreiecks ABC parallel AC, so hat man $AF : FB = CD : DB$ (§ 32; 3), folglich nach dem Hauptsatze $CE = AE$.

Da E hier auf der Verlängerung der Strecke AC liegen muss, und da er bei endlichem Abstande von A und C der Gleichung

nicht genügen kann, so nennt man ihn den **unendlich fernen Punkt** der parallelen Geraden AC und FD.

2. **Liegen drei Punkte D, E, F auf den Seitenlinien BC, CA, AB eines Dreiecks so, dass sie ein Dreieckschnittsverhältniss bestimmen, dessen Werth der negativen Einheit gleich ist, so befinden sie sich auf einer Geraden.**

Denn, würde AB von der Geraden DE in F' geschnitten, so wäre (1.) $(AF' . BD . CE) = -1$;
aber nach der Voraussetzung ist auch

$$(AF . BD . CE) = -1.$$

$$\therefore AF' : F'B = AF : FB.$$

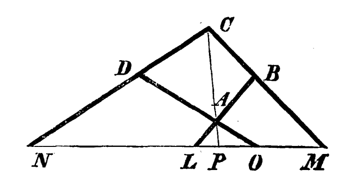
Addirt man 1 zu dieser Gleichung, so erhält man

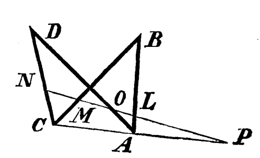
$$AB : F'B = AB : FB$$

$$\therefore FB = F'B.$$

Es fällt also F' mit F zusammen, was zu beweisen war.

3. Wir untersuchen jetzt, unter welchen Bedingungen vier Punkte eines **Vierecks** auf einer Geraden liegen.





Die Seitenlinien des Vierecks $ABCD$ werden von einer Geraden in L, M, N, O geschnitten. — Trifft die Diagonale CA mit der Querlinie in P zusammen, so hat man für die von der Querlinie LM geschnittenen Dreiecke ABC und CDA nach dem Satze des Menelaos (1.)

$$(AL . BM . CP) = -1$$

$$(CN . DO . AP) = -1$$

Das Produkt dieser Gleichungen ist

$$\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{ND} \cdot \frac{DO}{OA} = 1,$$

oder in kürzerer Form

$$(AL . BM . CN . DO) = 1.$$

In dieser Gleichung heisst das ihre linke Seite bildende Produkt aus den Verhältnissen, unter denen jede Seitenlinie des Vierecks — den Anfangs- und Endpunkt einer Seitenstrecke zum

End- und Anfangspunkte der anstossenden genommen — von einem Punkte getheilt wird, ein Viereckschnittsverhältniss (Möbius a. a. O.). Die Endgleichung deutet durch ihr Vorzeichen an, dass von den Schnittpunkten nur eine gerade Anzahl, 0, 2 oder 4 auf den Seitenstrecken des Vierecks selbst liegen kann.

Das Viereckschnittsverhältniss, unter welchem ein Viereck von einer Geraden geschnitten wird, ist der positiven Einheit gleich.

4. Liegen vier Punkte, L, M, N, O auf den Seitenlinien AB, BC, CD, DA eines Vierecks $ABCD$ so, dass sie ein Viereckschnittsverhältniss bestimmen, dessen Werth gleich der positiven Einheit ist, und befinden sich drei jener Punkte, L, M, N auf einer Geraden: so gehört dieser Geraden auch der vierte Punkt O an.

Denn, würde DA von der Geraden LN in O' geschnitten, so wäre (3.)

$$(AL \,.\, BM \,.\, CN \,.\, DO') = 1.$$

Nach Voraussetzung ist aber auch

$$(AL \,.\, BM \,.\, CN \,.\, DO) = 1$$

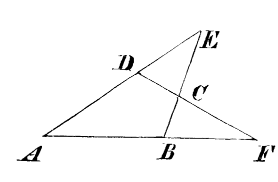
$$\therefore\; DO' : O'A = DO : OA.$$

Addirt man 1 zu dieser Gleichung, so ergiebt sich

$$DA : O'A = DA : OA$$

$$\therefore\; OA = O'A.$$

Es fällt also O' mit O zusammen, w. z. b. w.



5. Betrachtet man das vollständige Vierseit (§ 10; 2) $ABFCDE$ als ein Viereck $ABCD$, welches von der Diagonale EF als Querlinie geschnitten wird, so erhält man (3.):

$$\text{I. } (AF \,.\, BE \,.\, CF \,.\, DE) = 1.$$

Sieht man die Diagonalen AC und BD als Querlinien der Vierecke $BFDE$ und $AFCE$ an, so ergiebt sich (3.)

$$\text{II. } (BA \,.\, FC \,.\, DA \,.\, EC) = 1.$$

$$\text{III. } (AB \,.\, FD \,.\, CB \,.\, ED) = 1.$$

L. N. M. Carnot: Géométrie de position (Paris 1803).

Zus. 1. Aus II. und III. erhält man

$$\frac{AB^2}{CD^2} = \frac{AE \,.\, AF \,.\, BE \,.\, BF}{CE \,.\, CF \,.\, DE \,.\, DF}$$

$$\frac{AD^2}{BC^2} = \frac{AE \,.\, AF \,.\, DE \,.\, DF}{BE \,.\, BF \,.\, CE \,.\, CF}.$$

Zus. 2. Es sei $CF : DF = 3 : 5$, $BC : BE = 3 : 7$ und $AD = 50$ Meter. — Betrachtet man das Dreieck EDC, geschnitten von der Querlinie BF, so erhält man die Gleichung

$$\frac{EA}{AD} \cdot \frac{DF}{FC} \cdot \frac{CB}{BE} = -1$$

und aus derselben $AE : AD = 7 : 5$. Nun ergiebt sich mittels II.

$$AB : AF = 7 : 10$$
$$AE = 70 \text{ Meter.}$$

Aus den Streckenverhältnissen zweier Seitenlinien eines vollständigen Vierseits lassen sich die der beiden übrigen Seitenlinien berechnen.

6. Wenn ein $n$eck von einer Querlinie geschnitten wird, man zerlegt das Gebilde durch $n-3$ von einer Ecke ausgehende Diagonalen in $n-2$ Dreiecke und wendet auf letztere (wie Nr. 3) den Satz des Menelaos (1.) so an, dass jede Diagonale zweimal und in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird: so erhält man $n-2$ Gleichungen, deren Produkt auf einer Seite ein $n$eckschnittsverhältniss darstellt und folgenden Satz ausdrückt:

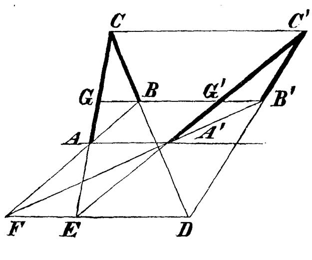
Ein $n$eck wird von einer Geraden nach einem $n$eckschnittsverhältnisse geschnitten, welches der negativen oder positiven Einheit gleich ist, je nachdem n eine ungerade oder gerade Zahl bezeichnet.

L. N. M. Carnot a. a. O. 241.

Ebenso lässt sich für das $n$eck ein 2. und 4. entsprechender Satz aufstellen.

Wir kommen nun zur Anwendung der vorstehenden Sätze.

7. Die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ liegen perspectivisch auf einem Strahlbündel, und es treffen BC und $B'C'$ in D, CA und $C'A'$ in E so zusammen, dass $DE \parallel AA'$ ist. — Wenn F der Durchschnitt von AB und $A'B'$ ist, so hat man



$$AF : BF = AA' : BB'$$
$$BD : CD = BB' : CC'$$
$$CE : AE = CC' : AA'.$$

Das Produkt dieser drei Gleichungen ist

$$\frac{AF}{BF} \cdot \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} = 1;$$
$$\therefore (AF \,.\, BD \,.\, CE) = -1.$$

F liegt also auf dem Strahle DE, welcher die Axe der Affingleichheit bildet (2.).

Zwei Dreiecke sind affingleich, wenn sie auf einem Strahlbündel perspectivisch liegen. und zwei Seitenlinien des einen mit den entsprechenden des andern auf einem Strahle zusammentreffen.

Zusatz. Zwei perspectivisch affingleiche Dreiecke sind gleichwendig, wenn sie eine Axe der Affingleichheit haben.

8. Die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ seien perspectivisch affingleich und ihre entsprechenden Seitenlinien AB und $A'B'$, BC und $B'C'$, CA und $C'A'$ treffen auf der Axe der Affinität in F, D, E zusammen. — Schneidet der Strahl BB' die Seitenstrecken AC und $A'C'$ in G und G', so ist

$$DC : BC = DC' : B'C' = DE : BG = DE : B'G'$$

I. $$\therefore BG = B'G'.$$

Nun ist ferner $$\left.\begin{aligned}\overline{ABG} &= \overline{A'B'G'}\\ \overline{GBC} &= \overline{G'B'C'}\end{aligned}\right\}\ \text{§ 33; 6. Zus.}$$

II. $$\therefore \overline{ABC} = \overline{A'B'C'}.$$

I. Wenn zwei perspectivische Dreiecke eine Axe der Affingleichheit haben, so werden sie von jedem (der Axe parallelen) Strahle unter gleichen Strecken geschnitten.

II. Zwei affingleiche Dreiecke haben gleiche Flächen.

9. Die beiden Dreiecke ABC und $A'B'C'$ liegen perspectivisch auf einem Strahlbündel und werden von einem Strahle BB' desselben unter den gleichen Strecken BG und $B'G'$ geschnitten.

I. ABC und $A'B'C'$ seien gleichwendig. Treffen BC und $B'C'$ in D, CA und $C'A'$ in E, AB und $A'B'$ in F zusammen, so ist

$$GB + BG' = BG' + G'B'$$

oder
$$GG' = BB';$$

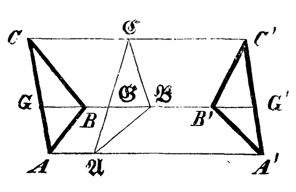
$$CE : GE = CC' : GG'$$

$$CD : BD = C'C' : BB'$$

$$\therefore\ CE : GE = CD : BD$$

$$\therefore\ GB \parallel ED \text{ (§ 32; 4. Zus. 1)}$$

$$\therefore\ ABC \eqsim A'B'C' \text{ (7.).}$$



II. ABC und $A'B'C'$ seien gegenwendig. — Man zeichne in dem gegebenen Strahlbündel ein Dreieck $\mathfrak{ABC}$, dessen Seitenstrecken denen des Dreiecks $A'B'C'$ symmetrisch sind. Dann ist $A'B'C' \cong \mathfrak{ABC}$ und $B'G'C' \cong \mathfrak{BGC}$, wenn $\mathfrak{G}$ den Durchschnittspunkt von BB' und $\mathfrak{AC}$ bezeichnet (§ 20; 3);

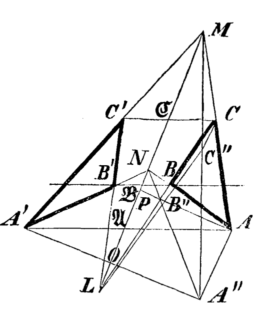
$$\therefore\ \mathfrak{BG} = BG,$$

und es sind die Dreiecke ABC und $\mathfrak{ABC}$ gleichwendig,

$$\therefore\ ABC \eqsim A'B'C' \text{ (§ 31; 3).}$$

Beide Fälle lassen sich zu folgendem Satze vereinigen:

Zwei Dreiecke sind affingleich, wenn sie perspectivisch auf einem Strahlbündel liegen und von einem Strahle unter gleichen Strecken geschnitten werden.



10. Die gegenwendigen Dreiecke ABC und $A'B'C'$ liegen perspectivisch auf einem Strahlbündel, so, dass die Strecken AA', BB', CC', welche ihre entsprechenden Ecken verbinden, von einer Geraden in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ halbirt werden. — Treffen AB und $A'B'$ in N, BC und $B'C'$ in L, und CA und $C'A'$ in M zusammen, so liegen die Punkte L, M, N auf der Geraden $\mathfrak{AC}$ (§ 32; 7). Fällt man nun aus A', B', C' Senkrechte auf $\mathfrak{AC}$ und verlängert dieselben um sich selbst bis A'', B'', C'', so ist

$$A''B''C'' \cong A'B'C'.$$

Denn, ist $A'O \perp \mathfrak{AC}$, so ist $A'OM \cong A''OM$ u. s. w. (Das

Dreieck $A'B'C'$ fällt nach einer Drehung von 180^0 um die Axe MN mit $A''B''C''$ zusammen). Ferner ist

$$\left.\begin{array}{l} MA : MC = MA'' : MC''; \therefore AA'' \parallel CC'' \\ NA : NB = NA'' : NB''; \therefore AA'' \parallel BB'' \end{array}\right\} \text{§ 32; 4. Zus. 1.}$$

Die gleichwendigen Dreiecke ABC und $A''B''C''$ liegen also perspectivisch auf einem Strahlbündel.

Fällt man aus A auf LM die Senkrechte AP, so ist

$$A\mathfrak{A}P \cong A'\mathfrak{A}O \cong A''\mathfrak{A}O; \therefore AP \# A''O; AA'' \parallel PO.$$

LM ist demnach die Axe der Affingleichheit für ABC und $A''B''C''$.

$$\therefore A'B'C' \simeq ABC \text{ (31; 3).}$$

Zwei gegenwendige Dreiecke sind affingleich, wenn sie perspectivisch auf einem Strahlbündel liegen, und die Strecken zwischen je zwei entsprechenden Ecken von einer Geraden halbirt werden.

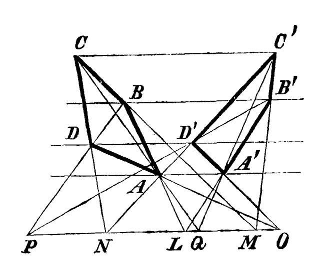
11. In dem Vierecke $ABCD$ werde die eine Diagonale BD von der andern AC in O halbirt. — Dann ist (10.)

$$ABC \simeq ADC,$$

und jede parallel zu BD verlaufende Gerade schneidet das Viereck in einer Strecke, welche von AC halbirt wird (8. 9.). AC ist also ein Durchmesser des Vierecks (§ 21; 4).

Jede Diagonale eines Vierecks ist ein Durchmesser desselben, wenn sie die andere Diagonale halbirt.

Zus. Beide Diagonalen eines Parallelogramms sind Durchmesser desselben.



12. Die gleichwendigen Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ liegen perspectivisch auf einem Strahlbündel so, dass die entsprechenden Seitenlinien AB und $A'B'$, BC und $B'C'$, CD und $C'D'$ in den Punkten L, M, N eines Strahles zusammentreffen. — Schneiden einander DA und $D'A'$ in O, BD und $B'D'$ in P, AC und $A'C'$ in Q, so ist

$$AL : BL = AA' : BB'$$
$$BM : CM = BB' : CC'$$
$$CN : DN = CC' : DD'$$
$$DO : AO = DD' : AA'$$
$$\therefore (AL \,.\, BM \,.\, CN \,.\, DO) = 1.$$

O liegt demnach auf LN (4.). Ebenso ergiebt sich, dass P und Q der Geraden LN angehören.

Der Strahl LN bildet mithin die Axe der Affingleichheit für die Vierecke.

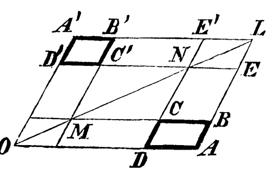
Ferner ist (8.) $\overline{ABD} = \overline{A'B'D'}$; $\overline{BCD} = \overline{B'C'D'}$
$\therefore \overline{ABCD} = \overline{A'B'C'D'}$.

I. Zwei Vierecke sind affingleich, wenn sie auf einem Strahlbündel perspectivisch liegen, und drei Seitenlinien des einen mit den entsprechenden des andern auf einem Strahle zusammentreffen.

II. Zwei affingleiche Vierecke, so wie die entsprechenden Dreiecke derselben, haben gleiche Flächen.

Zus. Zwei affingleiche Vierecke in perspectivischer Lage werden von jedem Strahle unter gleichen Strecken geschnitten (8.).

13. In den gegenwendigen Parallelogrammen $ABCD$ und $A'B'C'D'$ seien die Seitenstrecken $AB \parallel B'C'$, $BC \parallel C'D'$, und es treffen AB und $A'B'$ in L, BC und $B'C'$ in M, CD und $C'D'$ in N, DA und $D'A'$ in O so zusammen, dass die vier Punkte L, M, N, O auf einer Geraden liegen. — Nun ist



$$LA : LB = LO : LM = LA' : LB'$$
$\therefore AA' \parallel BB'$ (§ 32; 4. Zus. 1).

Auf gleiche Art ergiebt sich, dass
$$AA' \parallel DD' \parallel CC'.$$

Die Vierecke liegen demnach perspectivisch auf einem Strahlbündel. Ferner werden die Strecken AA', BB', CC', DD' als Diagonalen von Parallelogrammen von LO halbirt.
$$\therefore ABCD \mathrel{\ominus} A'B'C'D' \text{ (10.)}.$$

Zwei gegenwendige Parallelogramme mit parallelen Seitenstrecken liegen perspectivisch auf einem Strahlbündel, und sind affingleich, wenn die

Seitenlinien des einen mit denen des andern der Reihe nach auf einer Geraden zusammentreffen.

Die Gleichflächigkeit dieser Parallelogramme bewies Euklides (I; 43) für den Fall, dass sie eine Ecke gemein haben ($\overline{ADNE} = \overline{A'D'NE'}$), Proklos (Baroc. p. 262 ff.) umfassender.

10. Aus Nr. 7—12 erhält man leicht folgende allgemeine Sätze.

I. Zwei $n$ecke sind affingleich, wenn sie perspectivisch auf einem Strahlbündel liegen, und $n-1$ Seitenlinien des einen mit den entsprechenden des andern auf einem Strahle des Bündels zusammentreffen (7. 12).

II. Zwei affingleiche $n$ecke, wie die darin enthaltenen entsprechenden Theilgebilde, haben gleiche Flächen (12. 8).

III. Zwei perspectivisch affingleiche $n$ecke werden von jedem Strahle unter gleichen Strecken geschnitten (8. 12. Zus.).

IV. Zwei gegenwendige $n$ecke sind affingleich, wenn sie auf einem Strahlbündel perspectivisch liegen, und alle Strecken zwischen entsprechenden Ecken von einer Geraden halbirt werden (10).

Fünftes Hauptstück:

Die Affinität.

§ 36.

Einleitung.

1. Zwei Gebilde heissen affin (Ƨ), wenn sie auf einem Strahlbündel perspectivisch so liegen können, dass alle entsprechenden Geraden auf einer die Strahlen schneidenden Geraden, der Affinitätsaxe, zusammentreffen.

Anmerk. Clairaut hat zuerst (Mém. de Paris 1731) solche Gebilde in Betracht gezogen. L. Euler nannte sie affin, „affines". Introd. in Anal. inf. 1748. Lib. 2. 442). Ausführlicher behandelte sie A. F. Möbius (Baryc. C. 1827. § 144—160), von dessen Auffassung die vorliegende indess etwas abweicht. Das Zeichen Ƨ rührt her von J. H. T. Müller (Geometrie I. 1844. S. 254).

2. Zwei perspectivisch affine Gebilde sind gleich- oder gegenwendig, je nachdem ihre entsprechenden Punkte auf derselben oder auf verschiedenen Seiten der Affinitätsaxe liegen. Letztere heisst im ersten Falle die äussere, im zweiten die innere Affinitätsaxe.

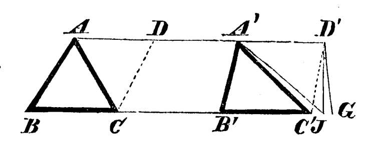
3. Ist ein Gebilde auf einem Strahlbündel gegeben, so kann man zur Construction eines zweiten perspectivisch affinen Gebildes zwei verbundene Strecken desselben zwischen den Strahlen willkürlich annehmen, da die Durchschnitte derselben mit den ihnen entsprechenden die Affinitätsaxe, und folglich alle Durchschnitte der entsprechenden Geraden, bestimmen.

4. Wenn unter drei Gebilden A, B, C die Gebilde A und B congruent, B und C affin sind, so sind auch A und C affin.

5. Zwei Punktreihen, welche perspectivisch auf einem Strahlbündel liegen, können sowohl als affin, wie als affingleich betrachtet werden. Vgl. § 32.

§ 37.

Affine Gebilde zwischen zwei Parallelen.



1. Die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ liegen zwischen zwei Parallelen so, dass ihre Grundlinien BC und $B'C'$ der einen, die gegenüber liegenden Ecken A und A' der andern Parallelen angehören, die beiden Dreiecke also gleiche Höhen haben. — Das Verhältniss der Grundlinien ist nun entweder in ganzen Zahlen gegeben oder nicht.

I. Es verhalte sich BC zu $B'C'$ wie die ganzen Zahlen m zu n. — Theilt man BC in m, $B'C'$ in n gleiche Theile (§ 32; 2. Zus. 1) und verbindet die Theilpunkte auf BC mit A, auf $B'C'$ mit A', so ist $\overline{ABC}$ in m, $\overline{A'B'C'}$ in n gleiche Theile zerlegt (§ 33; 6. Zus. II.), so dass sich ergiebt:

$$\overline{ABC} : \overline{A'B'C'} = BC : B'C'.$$

II. Das Verhältniss $BC : B'C'$ sei nicht durch ganze Zahlen auszudrücken. — Verhielte sich in diesem Falle $\overline{ABC}$ zu $\overline{A'B'C'}$

nicht wie BC zu $B'C'$, so sei, wenn G ein Punkt der Geraden $B'C'$ ist:

$$\overline{ABC} : \overline{A'B'C'} = BC : B'G.$$

Man schneide nun auf $B'G$ mit einem Masse von BC, welches kleiner als $C'G$ ist, gleiche Theile von B' aus ab. Dann fällt nothwendig mindestens ein Theilpunkt J zwischen C' und G, und, wenn $A'J$ gezogen ist, so hat man (I.)

$$\overline{ABC} : \overline{A'B'J} = BC : B'J.$$

Wäre nun

$$\overline{ABC} : \overline{A'B'C'} = BC : B'G,$$

so erhielte man als Quotienten dieser Gleichungen

$$\overline{A'B'C'} : \overline{A'B'J} = B'G : B'J,$$

eine unmögliche Gleichung, weil die eine Seite < 1, die andere > 1 ist. Diese Ungereimtheit verschwindet, wenn G mit C' zusammenfällt. Demnach ist auch im vorliegenden Falle

$$\overline{ABC} : \overline{A'B'C'} = BC : B'C'.$$

Zieht man von C und C' nach AA' die Strecken $CD \parallel BA$, $C'D' \parallel B'A'$, so erhält man die Parallelogramme $ABCD$ und $A'B'C'D'$ und es ist

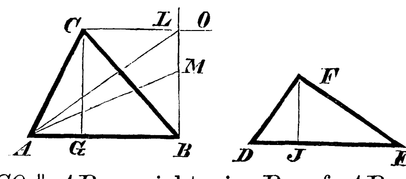
$$\overline{ABCD} = 2\ \overline{ABC},\ A'B'C'D' = 2\ A'B'C';$$

$$\therefore \overline{ABCD} : \overline{A'B'C'D'} = BC : B'C'.$$

Die Flächen zweier Dreiecke oder Parallelogramme mit gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundlinien.

Eukl. VI; 1.

Zusatz. Wenn zwei Dreiecke oder Parallelogramme einen Winkel und einen Schenkel desselben gleich haben, so verhalten sich ihre Flächen wie die andern Schenkel.



2. Die Dreiecke ABC und DEF haben gleiche Grundlinien $AB = DE$ und ungleiche Höhen CG, FJ. — Durch C ziehe man $CO \parallel AB$; errichte in B auf AB eine Senkrechte, welche CO in L schneidet; trage auf BL die Strecke $BM = JF$ ab, und ziehe

AL, AM. Dann ist $\overline{ABL} = \overline{ABC}$ und $\overline{ABM} = \overline{DEF}$ (§ 33; 6. Zus. II.).

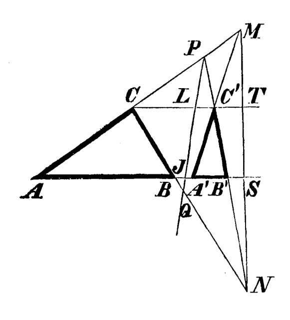
Nun kann man in den Dreiecken ABM, ABL die Gerade AB als Höhe, BM, BL als Grundlinien betrachten, so dass

$$\overline{ABL} : \overline{ABM} = BL : BM$$
$$\therefore \overline{ABC} : \overline{DEF} = CG : FJ.$$

Berücksichtigt man § 33; 6. Zus. I, so hat man den Satz:

Die Flächen zweier Dreiecke oder Parallelogramme mit gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen.

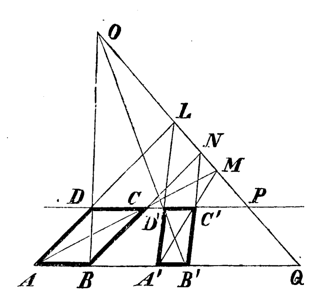
F. Commandino (1572) zu Eukl. VI; 1.



3. Zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ liegen perspectivisch zwischen zwei Parallelen so, dass ihre Grundlinien AB und $A'B'$ einer derselben angehören. — Treffen AC und $A'C'$ in M, BC und $B'C'$ in N, AC und $B'C'$ in P, BC und $A'C'$ in Q zusammen, so ist MN die Affinitätsaxe der gleichwendigen Dreiecke ABC und $A'B'C'$, PQ die Affinitätsaxe der gegenwendigen Dreiecke ABC und $B'A'C'$. Wird AA' von MN in S, von PQ in J, CC' von MN in T, von PQ in L geschnitten, so ist

$$AS : A'S = CT : C'T = BS : B'S$$
$$\therefore (AS - BS) : (A'S - B'S) = AS : A'S,$$
oder
$$AB : A'B' = AS : A'S = \overline{ABC} : \overline{A'B'C'}.$$
$$AJ : B'J = CL : C'L = BJ : A'J,$$
$$\therefore (AJ - BJ) : (B'J - A'J) = AJ : B'J$$
oder
$$AB : A'B' = AJ : JB' = \overline{ABC} : \overline{A'B'C'}.$$

Wenn zwei Dreiecke perspectivisch zwischen zwei Parallelen liegen, so haben sie eine äussere und eine innere Affinitätsaxe, je nachdem man sie als gleichwendig oder als gegenwendig betrachtet. Jede Affinitätsaxe theilt die Abstände je zweier entsprechender Punkte im Verhältniss der Grundlinien oder Flächen der Dreiecke.



4. Die beiden Parallelogramme $ABCD$ und $A'B'C'D'$ mit den ungleichen Grundlinien AB und $A'B'$ liegen gleichwendig zwischen zwei Parallelen. — Es treffen zusammen die entsprechenden Linien AD und $A'D'$ in L, AC und $A'C'$ in M, BC und $B'C'$ in N, BD und $B'D'$ in O. LN schneide DD' in P, AA' in Q. Nun hat man für die Dreiecke ADC und $A'D'C'$

$$AL : DL = AA' : DD'$$
$$DP : CP = DD' : CC'$$
$$CM : AM = CC' : AA'$$
$$\therefore (AL \, . \, DP \, . \, CM) = -1.$$

M liegt also auf LN (§ 35; 2).

Ebenso kann man beweisen, dass auch O auf dieser Geraden liegt. Die gleichwendigen Parallelogramme $ABCD$ und $A'B'C'D'$ sind mithin affin.

Fasst man dieselben Parallelogramme als gegenwendige Gebilde $ABCD$ und $B'A'D'C'$ auf, so ist auf gleiche Art zu zeigen, dass ihre entsprechenden Linien auf einer Geraden, der inneren Axe, zusammentreffen.

Wenn zwei Parallelogramme mit ungleichen Grundlinien zwischen zwei Parallelen liegen, so sind sie perspectivisch affin und haben eine äussere und eine innere Affinitätsaxe.

Zusatz. Zwei Parallelogramme mit ungleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind affin.

5. Die gleichwendigen Trapeze $ABCD$, $A'B'C'D'$ seien perspectivisch affin. — Treffen die entsprechenden Linien AD und $A'D'$ in L, BC und $B'C'$ in N, auf der Affinitätsaxe zusammen, wird letztere von dem Strahle AA' in O, von DD' in P geschnitten, so ist

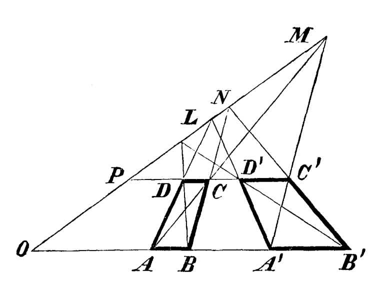
$$OA : OA' = AB : A'B' = DC : D'C' \quad (3.)$$
$$AB : A'B' = \overline{ABC} : \overline{A'B'C'}$$
$$DC : D'C' = \overline{CDA} : \overline{C'D'A'}$$
$$\therefore OA : OA' = \overline{ABCD} : \overline{A'B'C'D'}.$$

Wenn zwei perspectivisch affine Trapeze zwischen zwei Parallelstrahlen liegen, so verhalten sich

ihre Flächen und entsprechenden Strahlabschnitte wie die Abstände entsprechender Punkte von der Affinitätsaxe.

Zusatz. Zwei affine Trapeze werden durch entsprechende Diagonalen in verhältnissgleiche Dreiecke zerlegt.

6. Die gleichwendigen Trapeze $ABCD$, $A'B'C'D'$ liegen zwischen zwei Parallelen, so dass AB und $A'B'$ sich auf der einen, CD und $C'D'$ auf der andern befinden, und dass $AB : A'B' = CD : C'D'$ ist. — Schneiden einander AD und $A'D'$ in L, AC und $A'C'$ in M, BC und $B'C'$ in N, MN und AA' in O, LM und AA' in O', so ist



$$\left.\begin{aligned} OA : OA' &= AB : A'B' = CD : C'D' \\ O'A : O'A' &= AB : A'B' = CD : C'D' \end{aligned}\right\} (3.)$$

$$\therefore OA = O'A.$$

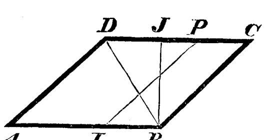
Die Punkte O und O' fallen also zusammen, d. i. N liegt auf der Geraden LM u. s. w., mithin ist $ABCD \wr A'B'C'D'$.

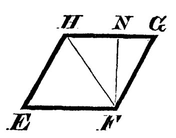
Zwei Trapeze sind affin, wenn sie in den Abständen und den Verhältnissen der parallelen Seitenstrecken übereinstimmen.

§ 38.

Flächenverhältniss; Flächeninhalt.

1. In den Parallelogrammen $ABCD$, $EFGH$ seien AB und EF die Grundlinien, BJ und FN die Höhen.





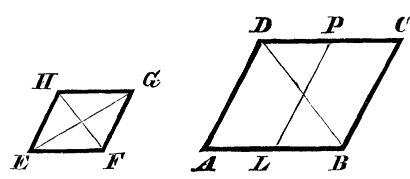
— Schneidet man auf AB von A aus die Strecke $AL = EF$ ab und zieht von L nach der gegenüber liegenden Seitenstrecke $LP \# BC$, so ist BJ auch die Höhe von $ALPD$, folglich

$$\overline{ABCD} : \overline{ALPD} = AB : AL; \text{ (§ 37; 1)}$$
$$\overline{ALPD} : \overline{EFGH} = BJ : NF; \text{ (§ 37; 2)}$$
$$\therefore \overline{ABCD} : \overline{EFGH} = (AB \,.\, BJ) : (EF \,.\, FN).$$
$$\overline{ABD} : \overline{EFH} = (AB \,.\, BJ) : (EF \,.\, FN).$$

Bezeichnet man „ein Produkt von Längenzahlen" kurz als „Längenprodukt", so hat man:

Die Flächen zweier Parallelogramme und Dreiecke verhalten sich wie die Längenprodukte aus ihren Grundlinien und Höhen.

F. Commandino: zu Eukl. VI; 23.



2. In den Parallelogrammen $ABCD$, $EFGH$ sei $\sphericalangle\ DAB = HEF$. — Schneidet man auf AB von A aus die Strecke $AL = EF$ ab und zieht von L nach CD die Strecke $LP \;\#\; AD$, so ist

$$\left.\begin{array}{l}\overline{ABCD} : \overline{ALPD} = AB : AL; \\ \overline{ALPD} : \overline{EFGH} = AD : EH\end{array}\right\} \text{(§ 37; 1. Zus.)}$$
$$\therefore \overline{ABCD} : \overline{EFGH} = [AB \,.\, AD] : [EF \,.\, EH].$$

Da diese Parallelogramme in allen Winkeln übereinstimmen, so hat man den Satz:

Die Flächen zweier Parallelogramme mit gleichen Winkeln verhalten sich zu einander wie die Längenprodukte zweier anstossender Seitenstrecken.

Eukl. VI; 14. 23.

Zus. 1. Es ist $\overline{ABD} : \overline{EFH} = (AB \,.\, AD) : (EF \,.\, EH)$.

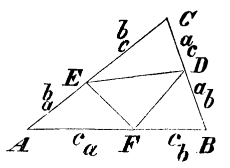
Die Flächen zweier Dreiecke, welche in einem Winkel übereinstimmen, verhalten sich wie die Längenprodukte aus den diesen Winkel einschliessenden Seitenstrecken.

Zus. 2. Es ist $\sphericalangle\ DAB + EFG = 180^{0}$ und
$$\overline{ABD} : \overline{EFG} = (AB \,.\, AD) : (EF \,.\, FG).$$

Wenn ein Winkel eines Dreiecks mit einem Winkel eines zweiten Dreiecks die Summe von 180^{0} bildet, so verhalten sich die Flächen beider Dreiecke wie die Längenprodukte aus den diese Winkel einschliessenden Seitenstrecken.

Pappos: Samml. VII; 146. 147.

3. Dem Dreiecke ABC sei das Dreieck DEF so eingeschrieben, dass D auf BC, E auf CA, F auf AB liegt. — Setzt man $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $BD = a_b$, $DC = a_c$ etc., so ist (2.)



$$\overline{AFE} : \overline{ABC} = b_a c_a : bc;$$
$$\overline{BDF} : \overline{ABC} = a_b c_b : ac;$$
$$\overline{CED} : \overline{ABC} = a_c b_c : ab,$$
$$\overline{DEF} = \overline{ABC} - (\overline{AFE} + \overline{BDF} + \overline{CED});$$
$$\therefore \frac{\overline{DEF}}{\overline{ABC}} = 1 - \left(\frac{b_a c_a}{bc} + \frac{a_b c_b}{ac} + \frac{a_c b_c}{ab}\right)$$
$$= \frac{abc - (a \,.\, b_a c_a + b \,.\, a_b c_b + c \,.\, a_c b_c)}{abc}.$$

Da nun

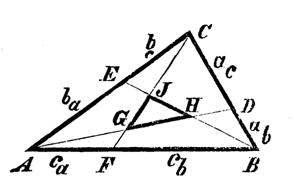
$$abc = (a_b + a_c)(b_a + b_c)(c_a + c_b),$$
$$= a_b b_a c_a + a_b b_a c_b + a_b b_c c_a + a_b b_c c_b + a_c b_a c_a + a_c b_a c_b + a_c b_c c_a + a_c b_c c_b$$
$$= a \,.\, b_a c_a + b \,.\, a_b c_b + c \,.\, a_c b_c + a_b b_c c_a + a_c b_a c_b$$
$$\therefore \frac{\overline{DEF}}{\overline{ABC}} = \frac{a_b b_c c_a + a_c b_a c_b}{abc} = \frac{a_b}{a} \cdot \frac{b_c}{b} \cdot \frac{c_a}{c} + \frac{a_c}{a} \cdot \frac{b_a}{b} \cdot \frac{c_b}{c}.$$

Beispiel: Für $\frac{a_b}{a} = \frac{1}{3}$, $\frac{b_c}{b} = \frac{1}{5}$, $\frac{c_a}{c} = \frac{1}{7}$ ist

$$.\ \overline{DEF} : \overline{ABC} = 7 : 15.$$

L. **Kunze**: Geometrie (1842); 3. Lehrs. im 5. Anhange.

4. In dem Dreiecke ABC sind die Seitenstrecken durch die Ecklinien AD, BE, CF in je zwei Theile zerlegt, welche die unter Nr. 3. angegebene Bezeichnung tragen. Von den Ecklinien schneiden einander AD und CF in G, AD und BE in H, BE und CF in J. Setzt man behufs grösserer Kürze



$$\frac{a_b}{a} = \alpha_b, \frac{a_c}{a} = \alpha_c, \frac{b_a}{b} = \beta_a, \frac{b_c}{b} = \beta_c, \frac{c_a}{c} = \gamma_a, \frac{c_b}{c} = \gamma_b,$$

so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned}\overline{AFD} : \overline{ABD} &= AF : AB = \gamma_a;\\ \overline{ABD} : \overline{ABC} &= BD : BC = \alpha_b;\end{aligned}\right\} (\S\ 37;\ 1)$$

$$\therefore\ \overline{AFD} : \overline{ABC} = \alpha_b \,.\, \gamma_a.$$

$$\overline{ADC} : \overline{ABC} = \alpha_c;$$

$$\therefore\ \overline{AFD} : \overline{ADC} = (\alpha_b \,.\, \gamma_a) : \alpha_c.$$

$$\overline{AFD} : \overline{AFG} = \overline{ADC} : \overline{AGC} = AD : AG;$$

$$\therefore\ \overline{AFD} : \overline{ADC} = \overline{AFG} : \overline{AGC}$$

$$1 + \frac{\overline{AFG}}{\overline{AGC}} = \frac{\overline{AFC}}{\overline{AGC}} = \frac{\alpha_c + \alpha_b \,.\, \gamma_a}{\alpha_c};$$

$$\overline{AFC} : \overline{ABC} = \gamma_a;$$

$$\therefore\ \frac{\overline{CAG}}{\overline{ABC}} = \frac{\alpha_c \gamma_a}{\alpha_c + \alpha_b \gamma_a}.$$

Ebenso findet man

$$\frac{\overline{ABH}}{\overline{ABC}} = \frac{\alpha_b \beta_a}{\beta_a + \alpha_b \beta_c}$$

$$\frac{\overline{BCJ}}{\overline{ABC}} = \frac{\beta_c\ \gamma_b}{\gamma_b + \beta_c \gamma_a}.$$

Nun ist $\overline{GHJ} = \overline{ABC} - (\overline{CAG} + \overline{ABH} + \overline{BCJ})$;

$$\therefore\ \frac{\overline{GHJ}}{\overline{ABC}} = 1 - \left(\frac{\alpha_c\ \gamma_a}{\alpha_c + \alpha_b \gamma_a} + \frac{\alpha_b\ \beta_a}{\beta_a + \alpha_b \beta_c} + \frac{\beta_c\ \gamma_b}{\gamma_b + \beta_c \gamma_a}\right).$$

Beispiel: Für $\alpha_b = \frac{2}{3}$, $\beta_c = \frac{1}{4}$, $\gamma_a = \frac{2}{5}$ erhält man

$$\overline{GHJ} : \overline{ABC} = 25 : 1386.$$

Zusatz. Wenn die Ecklinien AD, BE, CF einander in einem Punkte schneiden, so ist $\overline{GHJ} = 0$, folglich

$$1 = \frac{\alpha_c\ \gamma_a}{\alpha_c + \alpha_b \gamma_a} + \frac{\alpha_b\ \beta_a}{\beta_a + \alpha_b \beta_c} + \frac{\beta_c\ \gamma_b}{\gamma_b + \beta_c \gamma_a}.$$

Beispiel: $\alpha_b = \frac{2}{3}$, $\beta_c = \frac{1}{4}$, $\gamma_a = \frac{3}{5}$.

J. Steiner: Crelle's Journ. f. Math. III. (1828) S. 201. 202.

5. Die Grösse einer Fläche wird oft bestimmt durch die Vergleichung mit der Fläche eines Quadrates, in welchem jede Seitenstrecke der Längeneinheit gleich ist. Die Quadratfläche gilt dann als Flächeneinheit. Die Grösse einer Fläche, ausgedrückt durch die Anzahl der in ihr enthaltenen Flächeneinheiten, wird ihr „Flächeninhalt“ genannt. In diesem Sinne sagt man z. B., eine Fläche sei sechs Quadratmeter gross.

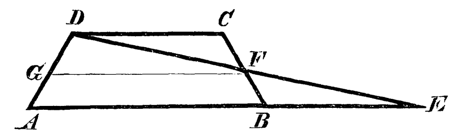
6. Wenn die Grundlinie eines Parallelogramms g, die Höhe h Längeneinheiten enthält, so verhält sich seine Fläche

zu der Flächeneinheit wie $g \cdot h$ zu 1, oder, sein Flächeninhalt beträgt $g \cdot h$ Flächeneinheiten (1).

Der Flächeninhalt eines Parallelogramms ist dem Längenprodukte aus Grundlinie und Höhe gleich.

Zusatz. Da die Fläche eines Dreiecks halb so gross ist wie die eines Parallelogramms von gleicher Grundlinie und Höhe (§ 33; 6.) so gilt auch der Satz:

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist dem halben Längenprodukte aus Grundlinie und Höhe gleich.



7. In dem Trapeze $ABCD$ seien $AB = a\ Mt$ und $CD = c\ Mt$ die parallelen Seitenstrecken, $h\ Mt$ der Abstand derselben. — Man verlängere AB über B um $BE = CD$. Dann ist $\overline{ABCD} \doteq \overline{AED}$ (§ 33; 8.);

$$\therefore \frac{h}{2}(a + c) \text{ Quadratmeter}$$

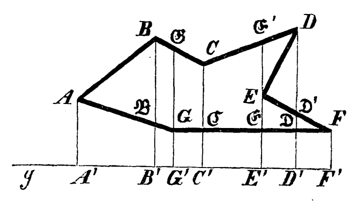
der Flächeninhalt des Trapezes.

Wird BC von DE in F geschnitten, geht durch F eine Gerade parallel zu BA und trifft diese Linie AD in G, so ist $BEF \cong CDF$, mithin $BF = CF$, folglich auch $AG = DG$ (§ 32; 2). So ergiebt sich $FG = \frac{1}{2} AE$. Es ist also $\overline{ABCD}$ der Fläche eines Parallelogramms mit der Grundlinie FG und der Höhe h gleich.

Der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich:

I. dem halben Längenprodukte aus der Summe seiner parallelen Seitenstrecken und dem Abstande derselben;

II. dem Längenprodukte aus der Strecke zwischen den Mitten der nicht parallelen Seitenstrecken und dem Abstande der parallelen.



8. Aus den Ecken eines Siebenecks $ABCDEFG$ seien auf eine Gerade g die Senkrechten AA', BB', CC' .. gefällt. Der Umfang der Figur wird geschnitten von BB' in 𝔅, von CC' in ℭ, von DD' in 𝔇 und

$\mathfrak{D}'$, von EE' in $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$, von GG' in $\mathfrak{G}$. Bezeichnet man durch $B\mathfrak{B}$, $A'G'$ etc. die Länge dieser Strecken, den Inhalt einer Fläche wie $\overline{AB\mathfrak{B}}$ durch $\overline{AB\mathfrak{B}}_J$, so ist

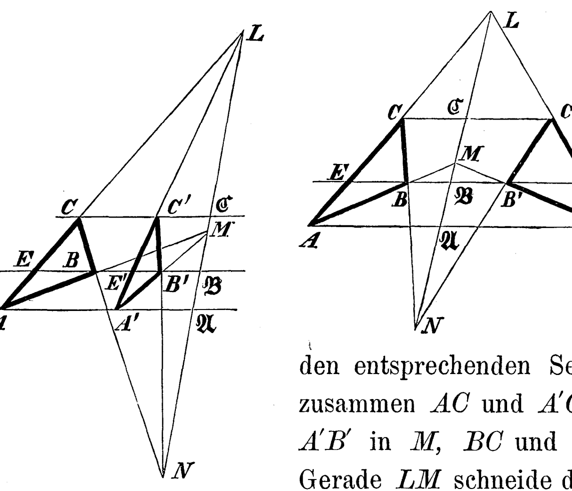
$$\overline{AB\mathfrak{B}}_J + \overline{B\mathfrak{G}\mathfrak{B}}_J = \tfrac{1}{2} \,.\, B\mathfrak{B} \,.\, A'G';$$
$$\overline{\mathfrak{B}\mathfrak{G}G}_J + \overline{\mathfrak{G}CG}_J = \tfrac{1}{2} \,.\, \mathfrak{G}G \,.\, B'C';$$
$$\overline{GC\mathfrak{C}}_J + \overline{C\mathfrak{E}'\mathfrak{C}}_J = \tfrac{1}{2} \,.\, C\mathfrak{C} \,.\, G'E';$$
$$\overline{\mathfrak{C}\mathfrak{E}'\mathfrak{E}}_J + \overline{\mathfrak{E}'DE}_J + \overline{E\mathfrak{D}'\mathfrak{E}}_J = \tfrac{1}{2} \,.\, \mathfrak{E}\mathfrak{E}' \,.\, C'D';$$
$$\overline{\mathfrak{E}\mathfrak{D}'\mathfrak{D}}_J + \overline{\mathfrak{D}'F\mathfrak{D}} = \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{D}\mathfrak{D}' \,.\, E'F'.$$
$$\therefore\ \overline{ABCDEFG}_J = \tfrac{1}{2}\,(B\mathfrak{B} \,.\, A'G' + G\mathfrak{G} \,.\, B'C' + \mathfrak{C}C \,.\, G'E' + \mathfrak{E}\mathfrak{E}' \,.\, C'D' + \mathfrak{D}\mathfrak{D}' \,.\, E'F').$$

Schneidet ein $n$eck auf Parallelstrahlen, die durch seine Ecken gehen, Strecken ab, so ist der Flächeninhalt des $n$ecks der Summe aller Längenprodukte aus je einer Parallelstrecke und dem halben Abstande der beiden benachbarten gleich.

K. F. Gauss: Carnot's Géom. de pos., übers. von Schumacher II. (1810) S. 362.

§ 39.

Affine Gebilde zwischen drei und mehr Parallelen.



1. Die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ liegen perspectivisch auf einem Strahlbündel. — Von den entsprechenden Seitenlinien treffen zusammen AC und $A'C'$ in L, AB und $A'B'$ in M, BC und $B'C'$ in N. Die Gerade LM schneide die Strahlen AA', BB', CC' bezüglich in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$. Nun ist

$$AM : BM = AA' : BB'$$
$$BN : CN = BB' : CC'$$
$$CL : AL = CC : AA'$$
$$\therefore\ (AM \,.\, BN \,.\, CL) = -\ 1.$$

Die durch L, M und N gehende Gerade (§ 35; 2) ist die Affinitätsaxe von ABC und $A'B'C'$.

Wenn ferner der Strahl BB' die Strecken AC und $A'C'$ in E und E' schneidet, so ist

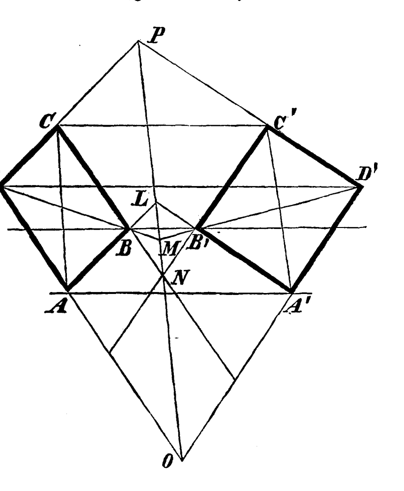
$$\overline{ABE} : \overline{A'B'E'} = \overline{BCE} : \overline{B'C'E'} = EB : E'B';$$
$$\therefore \overline{ABC} : \overline{A'B'C'} = EB : E'B'.$$

Auch ist $C\mathfrak{C} : C'\mathfrak{C} = E\mathfrak{B} : E'\mathfrak{B} = B\mathfrak{B} : B'\mathfrak{B};$
$$\therefore EB : E'B' = B\mathfrak{B} : B'\mathfrak{B} = C\mathfrak{C} : C'\mathfrak{C}.$$

Wenn zwei Dreiecke perspectivisch auf einem Strahlbündel liegen, so haben sie eine Affinitätsaxe, welche jede Strecke zwischen zwei entsprechenden Punkten in dem Verhältnisse der Dreiecksflächen so wie der Strecken theilt, in welchen diese Flächen von irgend einem Strahle geschnitten werden.

Zusatz. Gegenwendige perspectivisch affine Dreiecke sind affingleich, wenn die Strecke zwischen zwei entsprechenden Punkten von der Affinitätsaxe halbirt wird (§ 35; 10).

2. Die Parallelogramme $ABCD$ und $A'B'C'D'$ liegen perspectivisch auf einem Strahlbündel. — Schneiden einander von den entsprechenden Linien beider Gebilde AB und $A'B'$ in L, BD und $B'D'$ in M, BC und $B'C'$ in N, AD und $A'D'$ in O, CD und $C'D'$ in P, AC und $A'C'$ in Q, so befinden sich je auf einer Geraden (1.):



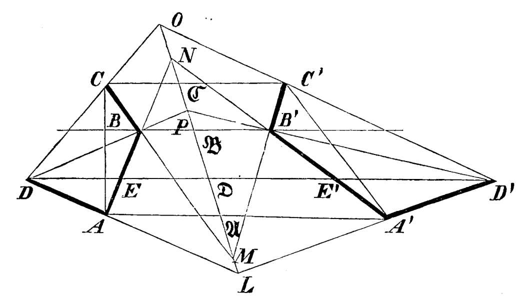
die Punkte L, M, O,
„ „ M, N, P,
„ „ L, N, Q,
„ „ O, P, Q.

Nun ist
$$LB : BA = LB' : B'A';\quad PC : CD = PC' : C'D'. \quad (\S\ 32;\ 3)$$
$$\therefore LB : PC = LB' : PC'.$$

Es treffen aber BC und $B'C'$ in N zusammen, mithin geht auch die Gerade PL durch N (§ 32; 8). Hieraus folgt mittels des Vorhergehenden, dass auf der Geraden PLN auch die Punkte Q, O und M sich befinden. Diese Gerade ist also die Axe der Affinität der Parallelogramme $ABCD$ und $A'B'C'D'$.

Wenn zwei Parallelogramme perspectivisch auf einem Strahlbündel liegen, so haben sie eine Affinitätsaxe.

Zusatz. Die Mittelpunkte zweier affingleichen Parallelogramme sind entsprechende Punkte derselben.



3. Von den perspectivischen Vierecken $ABCD$, $A'B'C'D'$ treffen die entsprechenden Linien DA und $D'A'$ in L, AB und $A'B'$ in N, BC und $B'C'$ in M, CD und $C'D'$ in O, BD und $B'D'$ in P zusammen, und es liegen die Punkte L, N, M auf einer Geraden. — Nun liegt P mit L und N, O mit M und P auf einer Geraden (1.). Eben so liegt der Durchschnitt von AC und $A'C'$ mit L, O, wie mit MN auf einer Geraden. Die Vierecke sind also affin.

Werden die Strahlen AA', BB', CC', DD' in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ von der Affinitätsaxe geschnitten, so ist (1.)
$$A\mathfrak{A} : A'\mathfrak{A} = B\mathfrak{B} : B'\mathfrak{B} = C\mathfrak{C} : C'\mathfrak{C} \text{ etc.}$$
$$\overline{ABC} : \overline{A'B'C'} = \overline{ACD} : \overline{A'C'D'} = A\mathfrak{A} : A'\mathfrak{A};$$
$$\overline{ABD} : \overline{A'B'D'} = \overline{BCD} : \overline{B'C'D'} = B\mathfrak{B} : B'\mathfrak{B}.$$
$$\therefore \overline{ABCD} : \overline{A'B'C'D'} = A\mathfrak{A} : A'\mathfrak{A} = B\mathfrak{B} : B'\mathfrak{B}.$$

Werden AB und $A'B'$ von DD' in E und E' geschitten, so ist
$$\overline{ABD} : \overline{A'B'D'} = DE : D'E' \text{ (1.)};$$
$$\therefore \overline{ABCD} : \overline{A'B'C'D'} = DE : D'E'.$$

I. Zwei Vierecke sind affin, wenn sie perspectivisch auf einem Strahlbündel liegen, und drei Verbindungslinien aller vier Ecken in dem einen mit

den entsprechenden in dem andern Vierecke auf einer Geraden zusammentreffen.

II. Die Flächen und entsprechenden Felder von zwei perspectivischen und affinen Vierecken verhalten sich wie irgend zwei entsprechende Strecken eines Strahls.

Zusatz. Die Flächen von zwei affinen Vierecken verhalten sich wie die Flächen der Dreiecke, in welche sie von entsprechenden Diagonalen getheilt werden.

4. Aus dem Vorstehenden erhält man leicht folgende Sätze:

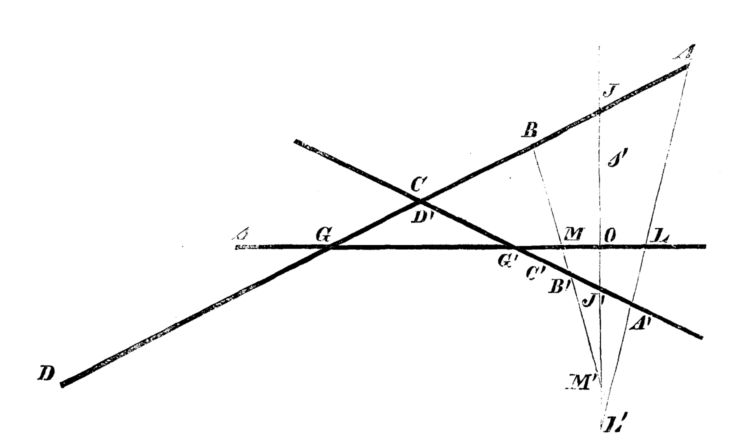
I. Zwei $n$ecke sind affin, wenn sie perspectivisch auf einem Strahlbündel liegen, und $n-1$ Verbindungslinien aller n Ecken in dem einen mit den entsprechenden in dem andern $n$ecke auf derselben Geraden zusammentreffen.

II. Die Flächen und entsprechenden Felder von zwei perspectivischen und affinen $n$ecken verhalten sich wie irgend zwei entsprechende Strecken eines Strahls.

§ 40.

Affine Punktreihen in schiefer Lage.

1. Zwei affine Punktreihen (§ 36; 5) $ABCD..A'B'C'D'..$ schneiden einander in dem Punkte C, D'. — Die entsprechenden



Strecken CD und $C'D'$ seien durch die inneren Punkte G und G' so getheilt, dass sich verhält

$$CG : GD = C'G' : G'D' = C'D' : CD.$$

$$\therefore \frac{C'G'}{G'D'} + 1 = \frac{CG}{GD} + 1, \text{ oder } C'D' : G'D' = CD : GD;$$

$$\therefore C'D' : CD = G'D' : GD;$$

$$\therefore CG : GD = G'D' : GD;$$

$$\therefore CG = G'D'.$$

Die entsprechenden Punkte G und G' sind also von dem Durchschnitte der Punktreihen gleichweit entfernt.

Dieselben Strecken CD und $C'D'$ seien durch die äusseren Punkte J und J' so getheilt, dass sich verhält

$$CJ : DJ = C'J' : D'J' = C'D' : CD.$$

$$\therefore \frac{C'J'}{D'J'} - 1 = \frac{CJ}{DJ} - 1, \text{ oder } C'D' : D'J' = CD : DJ;$$

$$\therefore C'D' : CD = D'J' : DJ;$$

$$\therefore CJ : DJ = D'J' : DJ;$$

$$\therefore CJ = D'J'.$$

Auch die entsprechenden Punkte J und J' sind demnach von dem Durchschnitte der affinen Punktreihen gleichweit entfernt.

Nach dem Vorstehenden ist

$$CG : GD = JC : JD, \therefore CG \,.\, JD = GD \,.\, JC;$$

$$C'G' : G'D' = J'C' : J'D', \therefore C'G' \,.\, J'D' = G'D' \,.\, J'C'.$$

Auf Grund dieser Gleichungen heissen J, C, G, D und J', C', G', D' harmonische Punkte.

Von den Geraden GG' und JJ', welche kürzer durch s und s' bezeichnet werden sollen, ist die erste, s, der Halbirungslinie des Winkels JCJ', die zweite, s', der Halbirungslinie des Winkels GCG' parallel: sie stehen also in ihrem Durchschnitte O auf einander senkrecht.

In den rechtwinkligen Dreiecken OGJ und $OG'J'$ ist $\measuredangle\ OGJ = OG'J'$,

$$\therefore \frac{\overline{OGJ}}{\overline{OG'J'}} = \frac{OG \,.\, JG}{OG' \,.\, J'G'} = \frac{OG \,.\, OJ}{OG' \,.\, OJ'} = \frac{OJ \,.\, GJ}{OJ' \,.\, G'J'} \text{(§ 38; 1.2)};$$

$$\therefore JG : J'G' = OJ : OJ' = OG : OG'.$$

Werden s und s' von AA' in L und L', von BB' in M und M' geschnitten, so hat man

$$\frac{\overline{LGA}}{\overline{LG'A'}} = \frac{LG \cdot AG}{LG' \cdot A'G'} = \frac{LG \cdot LA}{LG' \cdot LA'} \text{ (§ 38; 2)};$$

$$\therefore AG : A'G' = LA : LA'.$$

$$\frac{\overline{MGB}}{\overline{MG'B'}} = \frac{MG \cdot BG}{MG' \cdot B'G'} = \frac{MG \cdot MB}{MG' \cdot MB'};$$

$$\therefore BG : B'G' = MB : MB'.$$

Die Gerade s theilt also die Strecken zwischen den entsprechenden Punkten in proportionirte Stücke, so dass

$$LA : LA' = MB : MB' = OJ : OJ' = G'C : G'C' = GD : GD'.$$

Für die Dreiecke $L'JA$ und $L'J'A'$ ergiebt sich

$$\frac{\overline{L'JA}}{\overline{L'J'A'}} = \frac{L'J \cdot L'A}{L'J' \cdot L'A'} = \frac{L'J \cdot JA}{L'J' \cdot J'A'};$$

$$L'A : L'A' = JA : J'A'.$$

Ebenso erhält man mittels der Dreiecke $M'JB$ und $M'J'B'$:

$$M'B : M'B' = JB : J'B'.$$

Die Gerade s' theilt demnach mittels äusserer Punkte die Abstände der entsprechenden Punkte in proportionirte Abschnitte, so dass

$$L'A : L'A' = M'B : M'B' = J'C : J'C' = OG : OG' = JD : JD'.$$

Nennt man nun eine Gerade, welche — wie s und s' — die Abstände der entsprechenden Punkte schiefliegender affiner Punktreihen nach dem Verhältnisse der entsprechenden Strecken (durch innere oder äussere Punkte) theilt, eine (innere oder äussere) Situationsaxe der Punktreihen, so hat man den Satz:

Zwei affine Punktreihen in schiefer Lage haben zwei Situationsaxen, eine innere und eine äussere, welche einander rechtwinklig schneiden, und durch die von dem Durchschnitte der Punktreihen gleichweit entfernten entsprechenden Punkte gehen.

Zusatz. Verschiebt man die Punktreihe $A'B'C'D'$ . . der Richtung und Grösse nach um die Strecke $C'D'$, so fallen die entsprechenden Punkte C und C' zusammen und beide Punktreihen liegen perspectivisch auf einem Strahlbündel (§ 32;

4. Zus. 5). Die Situationsaxen werden dann zu Affinitätsaxen, welche die Winkel der Punktreihen halbiren.

R. Baltzer: Die Gleichheit und Aehnlichkeit etc. (1852) 45.

Sechstes Hauptstück:

Die Aehnlichkeit.

§ 41.

Einleitung.

1. Zwei Gebilde heissen ähnlich (similis, $\backsim$), wenn sie perspectivisch und so auf einem Strahlbüschel liegen können, dass ihre entsprechenden Strecken parallel sind.

Zusatz. In zwei ähnlichen $n$ecken sind alle entsprechenden Felder (Dreiecke, Vierecke u. s. w.) ähnlich; und umgekehrt: 2 $n$ecke sind ähnlich, wenn sie aus ähnlichen Feldern (Dreiecken u. s. w.) in gleicher Ordnung bestehen.

Der Projectionspunkt zweier perspectivisch liegender ähnlicher Gebilde wird innerer oder äusserer Aehnlichkeitspunkt genannt, je nachdem er auf der von zwei entsprechenden Punkten begrenzten Strecke selbst oder auf ihrer Verlängerung sich befindet.

Fr. Bartholomäi: Geradlinige Planimetrie (Jena 1851). § 314.

Das Zeichen $\backsim$ hat Leibniz eingeführt; die Benennung „Aehnlichkeitspunkt" rührt von L. Euler her (Nov. Acta Petr. IX. 1777 S. 154).

2. In zwei perspectivischen und ähnlichen Gebilden sind je zwei entsprechende Strecken gleich- oder entgegengesetzt gerichtet, je nachdem der Aehnlichkeitspunkt ein äusserer oder ein innerer ist (§ 13; 12.).

3. Auf einem Strahlbüschel mit dem Projectionspunkte P liegen die Gebilde $ABCD$.. und $A'B'C'D'$.. perspectivisch und es ist

$$PA : PA' = PB : PB' = PC : PC' ..$$

$$\therefore AB \parallel A'B';\ BC \parallel B'C' .. \text{(§ 32; 4. Zus. 1.).}$$

Zwei perspectivische Gebilde sind ähnlich, wenn



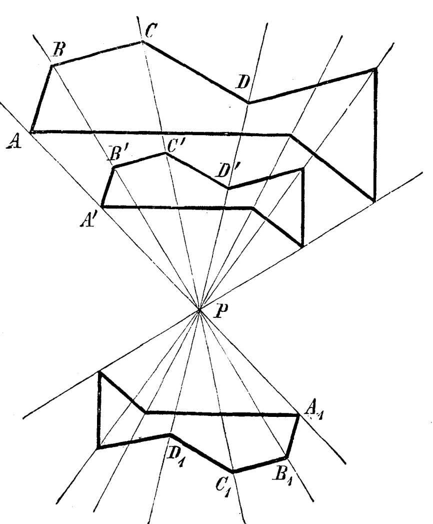
alle entsprechenden Punkte von den Strahlen proportionirte Strecken abschneiden.

4. Sind nun in zwei perspectivischen und ähnlichen Gebilden AB und $A'B'$, BC und $B'C'$ entsprechende Strecken, mithin $\sphericalangle\ ABC$ und $A'B'C'$ entsprechende Winkel, so ist

$$\sphericalangle\ ABC = A'B'C' \text{ (§ 14; 1).}$$

In zwei ähnlichen Gebilden sind die entsprechenden Winkel einander gleich.

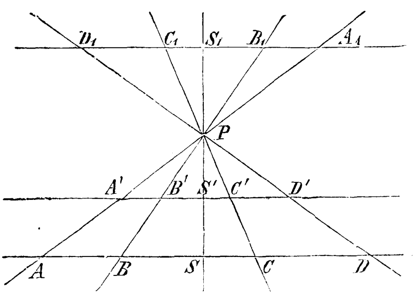
5. Es seien $ABCD$.. und $A'B'C'D'$.. zwei perspectivische und ähnliche Gebilde mit dem Aehnlichkeitspunkte P. — Nun ist



$$PA : PA' = PB : PB' = PC : PC' \text{.. (§ 32; 3);}$$
$$PB : PB' = AB : A'B' = BC : B'C' \text{ etc. (§ 32; 5);}$$
$$\therefore AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D'.$$

Die Verhältnisse je zweier entsprechender Strecken ähnlicher Gebilde sind einander gleich.

6. Wenn in zwei Punktreihen $ABCDS$.., $A'B'C'D'S'$.. die Punkte einander so entsprechen, dass die (durch entsprechende Punkte begrenzten) entsprechenden Strecken gleiche Verhältnisse bilden, also $AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D'$.. ist, und man



bringt die Punktreihen in parallele Lage, so geht CC' durch den Schnittpunkt von AA' und BB', ebenso DD'.. (§ 32; 7); die beiden Punktreihen sind also ähnlich.

Zwei Punktreihen sind ähnlich, wenn die Verhältnisse entsprechender Strecken einander gleich sind.

Zus. 3. Zwei affine (affingleiche) Punktreihen sind auch ähnlich (§ 32; 3.).

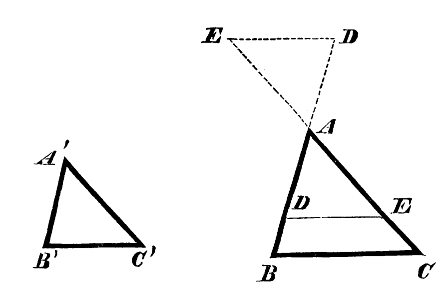
7. Wenn von drei Gebilden A, B, C

$$A \backsim B;\ B \cong C;$$
$$\therefore A \backsim C.$$

Wenn von zwei ähnlichen Gebilden das eine einem dritten congruent ist, so ist letzteres dem andern ähnlich.

§ 42.

Die Aehnlichkeit der Dreiecke.



1. In den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ sei $AB : AC = A'B' : A'C'$ und $AB : BC = A'B' : B'C'$. — Schneidet man auf AB eine Strecke $AD = A'B'$ ab und zieht durch D zu BC eine Parallele, welche AC in E schneidet, so ist (§ 32; 3. 5)

$$AB : AC = AD : AE = A'B' : A'C'$$
$$AB : BC = AD : DE = A'B' : B'C'$$
$$\therefore AE = A'C';\ DE = B'C'$$
$$\therefore ADE \cong A'B'C' \text{ (§ 20; 6)}$$
$$ADE \backsim ABC \text{ (§ 41; 1)}$$
$$\therefore ABC \backsim A'B'C' \text{ (§ 41; 7)}$$

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Verhältnisse der Seitenstrecken in dem einen Dreiecke zweien in dem andern in gleicher Ordnung gleich sind.
Eukl. VI; 5.

Zusatz. Zwei gleichschenklige Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in dem Verhältnisse der Grundlinie zu einem Schenkel übereinstimmen.

2. In den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ sei $\sphericalangle CAB = C'A'B'$ und $\sphericalangle ABC = A'B'C'$. — Schneidet man auf AB die Strecke $AD = A'B'$ ab und zieht $DE \parallel BC$, so ist

$$ADE \cong A'B'C' \text{ (§ 20; 8)}$$
$$ADE \backsim ABC$$
$$\therefore ABC \backsim A'B'C'.$$

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Winkel des einen zweien des andern Dreiecks gleich sind.

Eukl. VI; 4.

3. In den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ sei $AB : AC = A'B' : A'C'$ und $\sphericalangle CAB = C'A'B'$. — Schneidet man auf AB die Strecke $AD = A'B'$ ab und zieht $DE \parallel BC$, so ist (§ 32; 3)

$$AB : AC = AD : AE = A'B' : A'C'$$
$$\therefore AE = A'C'$$
$$ADE \cong A'B'C' \text{ (§ 20; 7)}$$
$$ADE \backsim ABC$$
$$\therefore ABC \backsim A'B'C'.$$

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Seitenstrecken des einen sich wie zwei des andern Dreiecks verhalten, und die eingeschlossenen Winkel einander gleich sind.

Eukl. VI; 6.

Zusatz. Zwei gleichschenklige Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in dem Winkel an der Spitze oder in einem Basiswinkel übereinstimmen.

4. In den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ sei $AB : BC = A'B' : B'C'$, $\sphericalangle CAB = C'A'B'$ und $\sphericalangle BCA + B'C'A' \gtrless 180^0$. — Schneidet man auf AB die Strecke $AD = A'B'$ ab und zieht $DE \parallel BC$, so ist (§ 32; 5)

$$AB : BC = AD : DE = A'B' : B'C'$$
$$\therefore DE = B'C'$$
$$\sphericalangle DEA = BCA;\ \sphericalangle DEA + B'C'A' \gtrless 180^0$$
$$ADE \cong A'B'C' \text{ (§ 20; 9)}$$
$$ADE \backsim ABC$$
$$\therefore ABC \backsim A'B'C'.$$

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Seitenstrecken des einen sich wie zwei des andern Dreiecks verhalten, die zwei entsprechenden Strecken

gegenüber liegenden Winkel gleich und die den beiden andern Strecken gegenüber liegenden zusammen grösser oder kleiner als ein gestreckter Winkel sind.

Eukl. VI; 7.

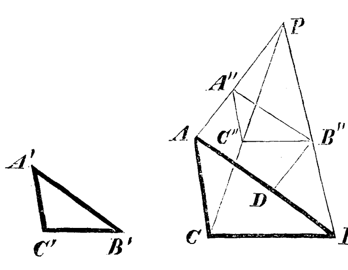
Zusatz. Zwei rechtwinklige Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in dem Verhältnisse der Hypotenuse zu einer Kathete übereinstimmen.

Anmerk. 1. Zur Bestimmung der Aehnlichkeit zweier Dreiecke dienen nach den vier vorstehenden Hauptsätzen:

I. zwei Streckenverhältnisse,

II. zwei Winkel,

III. ein Streckenverhältniss und ein Winkel in jedem Dreiecke.



Anmerk. 2. Man kann die vorstehenden Sätze auch auf andere Art beweisen. Z. B. In den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ sei $AB:BC = A'B':B'C'$ und $AB : AC = A'B' : A'C'$ (1.). — Man ziehe von einem beliebigen Punkte P aus nach A, B, C drei Strahlen, schneide auf AB eine Strecke $AD = A'B'$ ab, ziehe durch D parallel zu AP eine Gerade, welche BP in B'' trifft, und ziehe nach AP und CP die Strecken $B''A'' \parallel BA$. $B''C'' \parallel BC$. Dann ist

$$AB : BC = A''B'' : B''C'' = A'B' : B'C'$$
$$AB : AC = A''B'' : A''C'' = A'B' : A'C'$$
$$A'B' = AD = A''B''$$
$$\therefore B''C'' = B'C';\ A''C'' = A'C'$$
$$\therefore A''B''C'' \cong A'B'C'$$
$$A''B''C'' \sim ABC$$
$$\therefore ABC \sim A'B'C'.$$

5. Für die Flächen der ähnlichen Dreiecke ABC und $A'B'C'$ hat man (§ 38; 2. Zus. 1.) die Gleichung

$$\overline{ABC} : \overline{A'B'C'} = (AB \,.\, BC) : (A'B' \,.\, B'C').$$

Nun ist aber (§ 41; 5)

$$BC : B'C' = AB : A'B'.$$

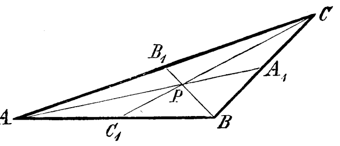
Aus dem Produkte dieser beiden Gleichungen ergiebt sich

$$\overline{ABC} : \overline{A'B'C'} = AB^2 : A'B'^2.$$

Die Flächen ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate der Längen entsprechender Strecken.

Eukl. VI; 19.

Unter verschiedenen Fällen der perspectivischen Lage zweier ähnlicher Dreiecke mag der folgende hervorgehoben werden.



6. In dem Dreiecke ABC seien A_1, B_1, C_1 die Mitten von BC, CA und AB, so dass das Dreieck $A_1B_1C_1$ dem Dreiecke ABC eingeschrieben ist. — Nun ist

$$A_1B_1 \parallel AB,\ B_1C_1 \parallel BC,\ C_1A_1 \parallel CA \ (\S\ 32;\ 4);$$
$$AB = 2\,A_1B_1,\ BC = 2\,B_1C_1,\ CA = 2\,C_1A_1 \ (\S\ 32;\ 5);$$
$$\therefore ABC \backsim B_1A_1C \ (3.).$$

Wenn AA_1 und BB_1 einander in P schneiden, so ist

$$PAB \backsim PA_1B_1 \ (1.)$$
$$\therefore AB : A_1B_1 = PA : PA_1 = PB : PB_1 = 2 : 1 \ (\S\ 41;\ 5).$$

Die Gerade CC_1 theilt sowohl AA_1, als auch BB_1 in demselben Verhältniss, sie muss also durch P gehen. P ist mithin der Aehnlichkeitspunkt der Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$.

Der Punkt P ist der Schwerpunkt beider Dreiecke (§ 32; 11).

I. Die Verbindungslinien der Ecken eines Dreiecks mit den Mitten der gegenüber liegenden Seitenstrecken gehen durch einen Punkt, den Schwerpunkt des Dreiecks.

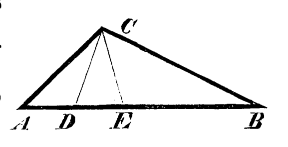
Archimedes (287—212 v. Chr.): Werke, übers. von Nizze S. 10.

II. Wenn ein Dreieck einem andern so eingeschrieben ist, dass die Ecken des eingeschriebenen in den Mitten der Seitenstrecken des andern liegen, so sind beide perspectivisch ähnlich und ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt ist ihr innerer Aehnlichkeitspunkt.

Zusatz. Der Schwerpunkt eines Dreiecks ist von einer Ecke doppelt so weit entfernt, wie von der Mitte der gegenüber liegenden Seitenstrecke.

Wir untersuchen nun einige Fälle, in denen zwei ähnliche Dreiecke von vier Geraden gebildet werden.

7. In dem Dreiecke ABC sei aus C nach der gegenüber liegenden Seitenstrecke AB die Gerade CD so gezogen, dass $\sphericalangle\ ACD = ABC$ ist. — Nun ist



$$ABC \backsim ACD \text{ (1.)}$$
$$\therefore AB : AC = AC : AD;$$
I. $$AC^2 = AB \,.\, AD.$$
$$AC : BC = AD : CD;$$
$$AB : BC = AC : CD.$$

Das Produkt der beiden letzten Gleichungen ist

$$AB : BC^2 = AD : CD^2;$$
II. $$\therefore AB : AD = BC^2 : CD^2.$$

Haben zwei ähnliche Dreiecke einen Winkel und eine ihm anliegende Seitenstrecke gemein, so ist diese die mittlere Proportionale zwischen den auf dem andern Winkelschenkel liegenden Strecken, und letztere verhalten sich wie die Längenquadrate der dem Winkel gegenüber liegenden Seitenstrecken.

Pappos: Samml. VII; 119.

Zusatz. Zieht man von C nach AB noch die Gerade CE so, dass $\sphericalangle BCE = BAC$ ist, so hat man

$$AC^2 = AB \,.\, AD;$$
$$BC^2 = AB \,.\, EB;$$
I. $$\therefore AC^2 + BC^2 = AB\,(AD + EB).$$

Ferner ist

$$ACD \backsim CBE,$$
$$\therefore AD : CD = CE : BE,$$
$$\sphericalangle CDE = CED, \therefore CE = CD;$$
II. $$\therefore CD \,.\, CE = CD^2 = AD \,.\, BE.$$

Endlich hat man

$$AB : AD = BC^2 : CD^2,$$
$$AB : EB = AC^2 : CE^2;$$
III. $$\therefore EB : AD = BC^2 : AC^2.$$

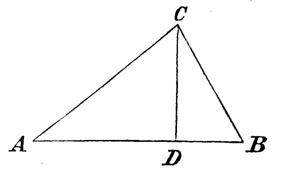
Fallen die Geraden CD und CE in eine zusammen, so ist

$$\sphericalangle ACB = CBA + BAC = 90^0.$$

Aus I. folgt dann:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

Obgleich leicht zu übersehen ist, welche Gestalt die übrigen vorstehenden Gleichungen in diesem besonderen Falle annehmen, so soll derselbe doch wegen seiner Wichtigkeit besonders behandelt werden.



8. Fällt man in dem rechtwinkligen Dreiecke ABC aus der Spitze C des rechten Winkels eine Senkrechte CD auf die Hypotenuse AB, so ist

$$ABC \backsim ACD \backsim CBD.$$

I. $\therefore AB : AC = AC : AD; \; AB : CB = CB : DB.$

II. $DA : DC = DC : DB.$

Aus den beiden Gleichungen I. folgt

$$AB \,.\, AD = AC^2; \; AB \,.\, DB = CB^2.$$

Die Summe dieser Gleichungen ist

III. $AB^2 = AC^2 + CB^2.$

ihr Quotient

IV. $AD : DB = AC^2 : CB^2.$

Da AD und DB die senkrechten Projectionen der Katheten AC und CB auf die Hypotenuse sind, so lauten die vorstehend entwickelten Sätze wörtlich

In einem rechtwinkligen Dreiecke ist

I. jede Kathete die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Hypotenuse und ihrer senkrechten Projection auf dieselbe;

II. die aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällte Senkrechte die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Hypotenuse;

III. das Längenquadrat der Hypotenuse der Summe aus den Längenquadraten der Katheten gleich;

IV. die Längenquadrate der Katheten verhalten sich wie ihre senkrechten Projectionen auf die Hypotenuse.

Eukl. VI; 8 und X; 33. lemma 1.

Zus. 1. Werden durch AD, DB, CD die Längen dieser Strecken bezeichnet, so sind in der aus II. abgeleiteten Gleichung

$$DA \,.\, DB = DC^2$$

beide Seiten negativ, weil das Produkt $DA \,.\, DB$ es ist (§ 8; 1).

DC stellt also die imaginäre Wurzel des negativen Produktes $DA \cdot DB$ dar.

Zus. 2. Rechtwinklige Dreiecke, in denen die Längen der Seitenstrecken rationale ganze Zahlen sind, erhält man auf folgende Weise.

Sind a, b, c die Seitenstrecken eines rechtwinkligen Dreiecks, so hat man $c^2 = a^2 + b^2$ (III.), mithin $c^2 - a^2 = b^2$;

$$\therefore \frac{c + a}{b} = \frac{b}{c - a} = \frac{p}{q};$$

$$\therefore q\,(c + a) = bp;\ q^2\,(c + a)^2 = b^2p^2 = p^2\,(c^2 - a^2)$$
$$p\,(c - a) = bq;\ p^2\,(c - a)^2 = b^2q^2 = q^2\,(c^2 - a^2).$$
$$p^2\,(c - a)^2 + q^2\,(c + a)^2 = (p^2 + q^2)\,(c^2 - a^2);$$
$$\therefore c : a = (p^2 + q^2) : (p^2 - q^2)$$
$$(p^2 + q^2)^2 - (p^2 - q^2)^2 = 4p^2q^2 = (2pq)^2.$$

Sind nun p und q zwei beliebige ungleiche ganze Zahlen, so sind auch die Werthe $2pq$, $p^2 - q^2$, $p^2 + q^2$ ganzzahlig und man kann durch sie immer die Längen der Seitenstrecken eines rechtwinkligen Dreiecks ausdrücken.

Wenn p und q einen Factor gemein haben, so haben die drei vorgenannten Zahlen das Quadrat dieses Factors gemein. Sind p und q ungerade, so bezeichnen $2pq$, $p^2 - q^2$, $p^2 + q^2$ gerade Zahlen. Will man daher nur solche Dreiecke haben, in denen die Verhältnisse der Seitenstrecken verschieden und durch die kleinsten ganzen Zahlen ausgedrückt sind, so muss man eine der Zahlen p, q gerade, die andere ungerade nehmen; beide aber müssen relative Primzahlen sein. Dann wird $2pq$ gerade, aber $p^2 - q^2$ und $p^2 + q^2$ ungerade. Man erhält für

p	2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	8	9
q	1	2	1	3	2	4	1	5	2	4	6	1	3	5	7	2
$p^2 - q^2$	3	5	15	7	21	9	35	11	45	33	13	63	55	39	15	77
$2pq$	4	12	8	24	20	40	12	60	28	56	84	16	48	80	112	36
$p^2 + q^2$	5	13	17	25	29	41	37	61	53	65	85	65	73	89	113	85

N. Frenicle: Traité des triangles rectang. (1676). Mém. de Paris. 1729. p. 85.

Einen Theil dieser Dreiecke kann man nach den Regeln finden, welche Proklos zu Eukl. I; 47 (Baroc. p. 271) mittheilt und von denen er die eine

$$\left(\frac{m^2 + 1}{2}\right)^2 = m^2 + \left(\frac{m^2 - 1}{2}\right)^2$$

dem Pythagoras, die andere

$$\left[\left(\frac{m}{2}\right)^2 + 1\right]^2 = m^2 + \left[\left(\frac{m}{2}\right)^2 - 1\right]^2$$

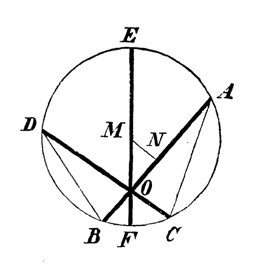
Plato zuschreibt. Der Inder Brahmegupta (um die Mitte des 7. Jahrh. nach Chr.) gab die umfassendere Regel

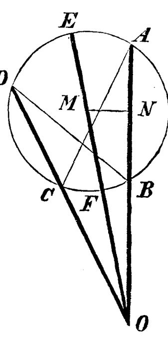
$$\frac{1}{4}\left(\frac{p^2}{q} + q\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{p^2}{q} - q\right)^2 + p^2,$$

welche bei der Multiplication mit $4\,q^2$ in die oben abgeleitete Gleichung übergeht. Aus der Gleichung des Brahmegupta folgt für $p = m$ und $q = 1$ die erste, für $p = m$ und $q = 2$ die zweite des Proklos.

Chasles: Aperçu historique etc. (1837), übers. von Sohnke S. 473.

9. Durch einen beliebigen Punkt O sind zwei Gerade gezogen, welche den Kreis um M in A, B und C, D schneiden.





Zieht man AC und BD, so ist

$OAC \backsim ODB$ (2.);

$\therefore OA : OC = OD : OB$;

$OA \,.\, OB = OC \,.\, OD$.

Auf allen Geraden, die durch denselben Punkt gehen und einen Kreis in zwei Punkten schneiden, sind die Produkte aus den Längen der Abstände des ersteren Punktes von den beiden letzteren einander gleich.

Eukl. III; 35 und Clavius zu Eukl. III; 36.

Zus. 1. Das Produkt aus den Längen der Abstände eines Punktes auf einer Geraden von ihren Durchschnitten mit dem Kreise wird „die Potenz des Punktes in Bezug auf den Kreis“ oder auch „die Potenz des Kreises in Bezug auf den Punkt“ genannt. Sie heisst „innere“ oder „äussere Potenz“, je nachdem der Punkt innerhalb oder ausserhalb des Kreises liegt.

J. Steiner: Crelle's Journ. I; (1826) S. 164.

Die äussere Kreispotenz ist positiv, die innere negativ, weil bei jener die Abstände des Punktes vom Kreise gleiche, bei dieser entgegengesetzte Richtung haben. Die Kreispotenz ist null für einen Punkt des Kreises.

Zus. 2. Ist N die Mitte der Sehne AB, so ist die Kreispotenz in Bezug auf O:

$$OA \,.\, OB;$$
$$OA = ON + NA;$$
$$OB = ON + NB = ON - BN = ON - NA;$$
$$OA \,.\, OB = (ON + NA)\,(ON - NA)$$
$$= ON^2 - NA^2.$$

Geht durch O und den Kreismittelpunkt M eine Sekante, welche den Kreis in E und F schneidet, so ist

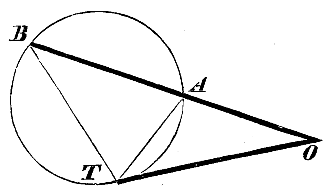
$$OA \,.\, OB = OE \,.\, OF;$$
$$OE \,.\, OF = OM^2 - ME^2;$$
$$\therefore\ OA \,.\, OB = OM^2 - ME^2 = OM^2 - MA^2.$$

Die Kreispotenz in Bezug auf einen Punkt ist gleich dem Längenquadrate der Centraldistanz des Punktes, vermindert um das Längenquadrat des Radius.

Zus. 3. Liegt O innerhalb des Kreises, und steht AB in O senkrecht auf dem Durchmesser EF, so halbirt O die Sehne AB (§ 24; 7), und diese ist die kürzeste aller durch O gehenden Sehnen (§ 28; 6). Also ist

$$OE \,.\, OF = -\, OA^2.$$

Die innere Kreispotenz in Bezug auf einen Punkt ist dem negativen Längenquadrate der Hälfte der kleinsten Sehne gleich, welche durch den Punkt geht.

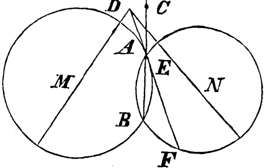


10. Aus einem Punkte O gehen nach einem Kreise zwei Gerade, von denen ihn die eine in T berührt, die andere in A und B schneidet. — Zieht man TA und TB, so ist $OAT \backsim OTB$ (2.)

$$\therefore\ OA : OT = OT : OB;$$
$$OT^2 = OA \,.\, OB.$$

Die äussere Kreispotenz in Bezug auf einen Punkt ist dem Längenquadrate der von dem Punkte und dem Kreise begrenzten Tangentenstrecke gleich.

Eukl. III; 36.



11. Die Kreise um M und N schneiden einander in A und B. — Für irgend einen Punkt C der gemeinschaftlichen Sekante AB ist nun (9. Zus. 2)

$$CA \,.\, CB = CM^2 - AM^2 = CN^2 - AN^2.$$

Zieht man durch den Punkt D, welcher nicht auf AB liegt, und durch A eine Gerade, welche die Kreise M und N in E und F schneidet, so ist $AE < AF$ (wenn D und M auf einer Seite von AB liegen), mithin

$$DA \,.\, DE < DA \,.\, DF;$$
$$\therefore DM^2 - AM^2 < DN^2 - AN^2.$$

Wenn zwei Kreise einander schneiden, so sind die Kreispotenzen für jeden Punkt der gemeinschaftlichen Sekante einander gleich, für jeden andern Punkt ungleich.

Gaultier: Journ. de l'École Polytechn. XVI (1812) p. 139.

Zusatz. Die Tangenten, welche von einem äusseren Punkte der gemeinschaftlichen Sekante zweier Kreise an dieselben gelegt werden können, sind einander gleich.

12. Zwei Gerade, auf denen die Strecken AB und CD liegen, schneiden einander in dem Punkte O, der für beide Strecken zugleich entweder ein innerer oder ein äusserer ist, so dass die Gleichung besteht:

$$OA \,.\, OB = OC \,.\, OD.$$

Construirt man nun einen Kreis, der durch A, B und C geht, so muss auch D auf demselben liegen. Denn schnitte die Gerade OC den Kreis in D' zum zweitenmale, so wäre

$$OC \,.\, OD = OC \,.\, OD'$$
$$\therefore OD = OD'.$$

Die Endpunkte zweier Strecken liegen auf einem Kreise, wenn die Längenprodukte ihrer Abstände von dem Durchschnitte der beiden Geraden, denen die Strecken angehören, einander gleich sind.

Clavius zu Eukl. III; 35. 36.

Zusatz. Wenn drei Punkte A, B, C auf einem Kreise liegen, und es ist für einen Punkt O der Geraden AB:

$$OA \,.\, OB = OC^2,$$

so berührt OC den Kreis in C.

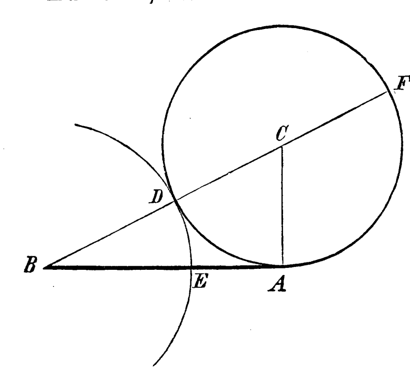
Denn, wenn M der Mittelpunkt des Kreises ist, so hat man

$$OA \cdot OB = OM^2 - MC^2 \text{ (9. Zus. 2.).}$$

$$\therefore OM^2 = OC^2 + MC^2.$$

Das Dreieck OMC ist also bei C rechtwinklig (7. Zusatz) und OC eine Tangente des Kreises.

Eukl. III; 37.



13. Von dem Punkte B geht an den Kreis um C eine Tangente, welche ihn in A berührt, und es ist die Tangentenstrecke BA dem Durchmesser des Kreises gleich. Zieht man von B aus durch C eine Sekante, welche den Kreis in D und F schneidet, so ist

$$BD : BA = BA : BF \text{ (10.);}$$

$$\therefore BD : DF = DF : BF.$$

Die Strecke BF ist also in D „nach stetiger Proportion" („nach dem äusseren und mittleren Verhältniss", Eukl. VI; Def. 3) getheilt (sectio divina; s. aurea).

Schneidet man nun auf BA die Strecke $BE = BD$ ab, so ist

$$BA : BD = (BA + BD) : BA;$$

$$\therefore BA : BE = (BA + BE) : BA.$$

Subtrahirt man 1 von dieser Gleichung, so ergiebt sich

$$EA : BE = BE : BA.$$

BA ist mithin in E stetig getheilt.

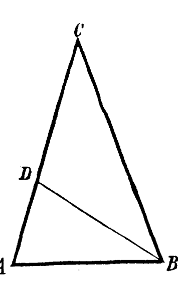
Geht von einem Punkte eine Tangente an einen Kreis, und ist die von dem Punkte und dem Kreise begrenzte Strecke derselben dem Durchmesser gleich, so wird die von demselben Punkte auslaufende Mittelpunktssekante vom Kreise stetig getheilt. Die Tangentenstrecke wird aber stetig getheilt, wenn man auf ihr von einem Ende aus den äusseren Abschnitt der Sekante abträgt.

Legendre: Élém. de Géom. (1800). III. Probl. 4.

Zus. 1. In dem rechtwinkligen Dreiecke ABC ist (8.)

$$(BD + DC)^2 = AB^2 + AC^2;$$
$$\left(BD + \frac{AB}{2}\right)^2 = AB^2 + \frac{AB^2}{4} = \frac{5 \,.\, AB^2}{4};$$
$$\therefore\ BD = BE = \frac{AB}{2}\,(\sqrt{5} - 1).$$

Eukl. XIII; 3.

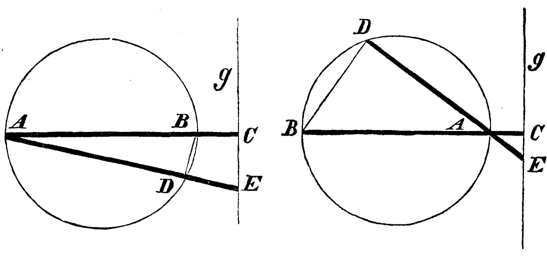


Zus. 2. Ist die Strecke AC in D stetig getheilt, und beschreibt man über dem kleineren Abschnitte AD als Basis mit dem grösseren DC als Schenkel ein gleichschenkliges Dreieck ABC, so ist jeder Winkel an der Basis doppelt so gross als der Winkel an der Spitze.

Denn, da $CA : AB = AB : AD$ ist, so hat man
$$BAC \backsim DAB \ (3.)$$
$$\therefore\ \sphericalangle\, ABC = ADB = 2\, DBC = 2 \,.\, ABD.$$
Mithin ist $\sphericalangle\, ABD = 36^0$, $\sphericalangle\, DAB = 72^0$.

Ist C der Mittelpunkt, CA der Halbmesser eines Kreises, so bildet AB die Seitenstrecke eines eingeschriebenen regelmässigen Zehnecks.

Pappos: Collect. math. V; 47.



14. Ein Durchmesser AB eines Kreises steht auf der Geraden g in C senkrecht; eine andere Gerade schneidet den Kreis in A und D, die Linie g in E. — Zieht man BD, so ist $ABD \backsim AEC$ (2.),
$$\therefore\ AB : AD = AE : AC;\ AB \,.\, AC = AD \,.\, AE.$$

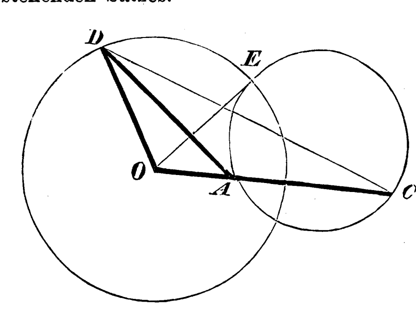
Nennt man die Punkte B und C, so wie D und E potenzhaltend in Bezug auf A, insofern die Längenprodukte ihrer Abstände von A einander gleich sind, so ergiebt sich der Satz:

Liegt der Projectionspunkt eines Strahlbüschels auf einem Kreise, so schneiden alle Strahlen den Kreis und eine Gerade, welche auf dem durch den

Projectionspunkt gehenden Durchmesser senkrecht steht, in potenzhaltenden Punkten.

G. B. Benedetti (gest. 1590 n. Chr.) in Briefen: P. Herigone: Curs. Math. I. S. 324.

Robert Simson beweist (The loci plani of Apollonius restored. 1749. I; 8. 9. S. 47—49 der Uebers. von Camerer) zwei Umkehrungen des vorstehenden Satzes.



15. Der Radius OE eines Kreises um O berühre in E einen zweiten Kreis. Eine durch den Mittelpunkt des ersteren Kreises gehende Gerade schneide den zweiten in A und C. Ein beliebiger Punkt D des Kreises um O sei mit O, A und C durch Gerade verbunden. — Nun ist

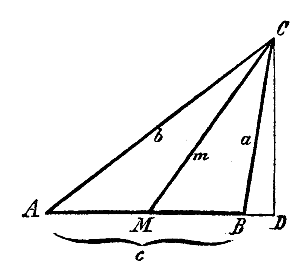
$$OE^2 = OD^2 = OA \,.\, OC \text{ (10.)};$$
$$\therefore OA : OD = OD : OC;$$
$$\therefore \triangle AOD \backsim DOC$$
$$AO : DO = AD : DC.$$

Bewegt sich der Punkt D auf dem Umfange des Kreises O, so bleibt, bei fester Lage von AC, das Verhältniss $AD : DC$ unverändert.

Apollonius: Pappos VII; Einl. — R. Simson: Apollonius „Ebene Oerter", wiederhergestellt; S. 212 ff. der Uebers. Vgl. A. F. Möbius: Kreisverwandtschaft (1855) § 21. 22.

§ 43.

Zusammenhang von Strecken im Dreiecke, Vierecke und Kreise.



1. Fällt man aus einer Ecke C eines Dreiecks ABC eine Senkrechte CD auf die gegenüber liegende Seitenlinie AB, so ist (§ 42; 8)

$$AC^2 = AD^2 + DC^2;\ BC^2 = BD^2 + DC^2;$$
$$\therefore\ AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2 = AD^2 - DB^2.$$

Ist M die Mitte von AB, so erhält man

$$AD^2 - DB^2 = (AM + MD)^2 - (MB - MD)^2$$
$$= 4 \,.\, AM \,.\, MD = 2\, AB \,.\, MD.$$
$$\therefore\ AC^2 - BC^2 = 2\, AB \,.\, MD.$$

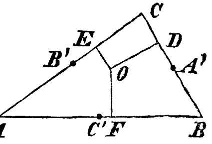
Setzt man $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $MD = d$, so erhält die vorstehende Gleichung folgende Gestalt

$$b^2 - a^2 = 2\, c \,.\, d.$$

Der Unterschied der Längenquadrate zweier Seitenstrecken eines Dreiecks ist dem doppelten Längenprodukte der dritten Seitenstrecke und des Abstandes ihrer Mitte vom Fusspunkte der aus der gegenüber liegenden Ecke gefällten Höhe gleich.

Pappos: VII; 120.

Zusatz. Wenn zwei Gerade auf einander senkrecht stehen, so hat der Unterschied aus den Längenquadraten der Abstände eines jeden Punktes der einen von zwei festen Punkten der andern Geraden denselben Werth.



2. In dem Dreiecke ABC seien aus einem beliebigen Punkte O die Senkrechten OD, OE, OF auf die Seitenstrecken BC, CA, AB gefällt, deren Mitten die Punkte A', B', C' sind. Nun ist (1.)

$$AO^2 - BO^2 = AF^2 - BF^2 = 2 \,.\, AB \,.\, C'F;$$
$$BO^2 - CO^2 = BD^2 - CD^2 = 2 \,.\, BC \,.\, A'D;$$
$$CO^2 - AO^2 = CE^2 - AE^2 = 2 \,.\, CA \,.\, B'E.$$

Die Addition dieser drei Gleichungen ergiebt

$$AF^2 + BD^2 + CE^2 = BF^2 + CD^2 + AE^2;$$
$$AB \,.\, C'F + BC \,.\, A'D + CA \,.\, B'E = 0.$$

3. Umgekehrt, wenn in einem Dreiecke ABC die Punkte A', B', C' die Mitten der Seitenstrecken BC, CA, AB, und D, E, F Punkte dieser Seitenlinien sind, ausserdem aber eine der Gleichungen

$$AF^2 - BF^2 + BD^2 - CD^2 + CE^2 - AE^2 = 0,$$
$$AB \,.\, C'F + BC \,.\, A'D + CA \,.\, B'E = 0$$

gilt, so treffen die in D, E, F auf den Seitenlinien errichteten Senkrechten in einem Punkte zusammen.

Denn, wenn die in D und E errichteten Senkrechten in O

zusammentreffen, und eine aus O auf AB gefällte Senkrechte diese Seitenlinie in G schneidet, so ist (2.)

$$AF^2 - BF^2 = AG^2 - BG^2;\ AB \,.\, C'F = AB \,.\, C'G;$$
$$\therefore\ C'F = C'G.$$

G fällt also mit F zusammen.

Zus. 1. Die Senkrechten, welche auf den Seitenstrecken eines Dreiecks in ihren Mitten errichtet werden, treffen in einem Punkte zusammen. (Vgl. § 24; 9).

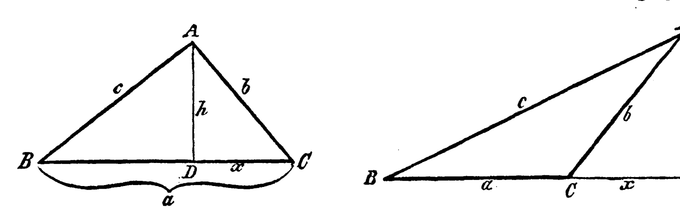
Zus. 2. Sind AD, BE, CF die drei Höhen eines Dreiecks, so ist

$$CA^2 - BC^2 + AB^2 - CA^2 + BC^2 - AB^2 = AF^2 - BF^2$$
$$+ BD^2 - CD^2 + CE^2 - AE^2 = 0.$$

Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkte. Vgl. § 30; 7.

L. Kunze: Geometrie (1842) S. 72. 73.

4. In einem Dreieck ABC ist aus A auf die gegenüber



liegende Seitenlinie BC die Senkrechte AD gefällt. — Nun ist (§ 42; 8),

$$AB^2 = AD^2 + DB^2 = AD^2 + (DC + CB)^2;$$
$$= (AD^2 + DC^2) + CB^2 + 2\,DC \,.\, CB;$$
$$\therefore\ AB^2 - (AC^2 + CB^2) = 2 \,.\, DC \,.\, CB.$$

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

I. Wenn der Winkel ACB stumpf ist, so liegt D auf der Verlängerung von BC; die Strecken DC und CB haben also gleiche Richtung, und ihr Längenprodukt ist positiv.

Das Längenquadrat der einem stumpfen Dreieckswinkel gegenüber liegenden Seitenstrecke ist grösser als die Summe der Längenquadrate der ihn einschliessenden Seitenstrecken um das doppelte Längenprodukt aus einer der letzteren und der senkrechten Projection der andern auf sie.

Eukl. II; 12.

II. Wenn der Winkel ACB spitz ist, so fällt D auf die

Strecke BC selbst, mithin haben DC und CB entgegengesetzte Richtungen, und das Längenprodukt $DC \cdot CB$ ist negativ.

Das Längenquadrat der einem spitzen Dreieckswinkel gegenüber liegenden Seitenstrecke ist kleiner als die Summe der Längenquadrate der beiden andern Seitenstrecken um das doppelte Produkt aus der Länge einer der letzteren und der senkrechten Projektion der andern auf sie.

Eukl. II; 13.

Setzt man $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $CD = x$, so erhält man die beiden Gleichungen

$$\text{I.} \quad c^2 - (a^2 + b^2) = 2\,ax$$

$$\text{II.} \quad a^2 + b^2 - c^2 = 2\,ax.$$

Zus. 1. Wenn in einem Dreiecke ABC die Gleichung

$$AB^2 = AC^2 + CB^2$$

besteht, so ist dasselbe bei C rechtwinklig.

Zus. 2. Wenn in dem Dreiecke ABC die Strecke $AB = BC$ ist, und man projicirt mittels der Senkrechten AD den einen Schenkel AB auf den andern, so ist (II.)

$$AC^2 = 2\,BC \cdot DC.$$

In einem gleichschenkligen Dreiecke ist das Längenquadrat der Grundlinie doppelt so gross wie das Längenprodukt eines Schenkels und der senkrechten Projection der Grundlinie auf ihn.

Pappos: Math. Collect. V; 24.

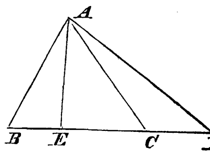
Zus. 3. Schiefwinklige Dreiecke, in denen Seitenstrecken und Höhe rational sind, kann man durch Zusammensetzung zweier rationaler rechtwinkliger Dreiecke (§ 42; 8. Zus. 2) bilden, indem man durch Multiplication zwei Katheten einander gleich macht und dann beide rechtwinklige Dreiecke mit ihren gleichen Katheten zu einem schiefwinkligen Dreiecke zusammensetzt, das die Summe oder Differenz von jenen ist.

Auf diese Weise lassen sich mittels zweier rationaler rechtwinkliger Dreiecke acht schiefwinklige bilden. Z. B.

Rechtwinklige Dreiecke.						Schiefwinklige Dreiecke.			
3	4	5	5	12	13	Höhe	Grundlinie	übrige Seitenstrecken.	
15	20	25	**15**	36	39	15	36 ± 20	25	39
15	**20**	25	**20**	48	52	20	48 ± 15	25	52
12	16	20	5	**12**	13	12	16 ± 5	20	13
5	**12**	15	5	**12**	13	12	9 ± 5	15	13

In den Werthen für die Grundlinie giebt das Vorzeichen — stumpfwinklige Dreiecke, in denen der stumpfe Winkel an der Grundlinie liegt.

L. Kunze: Geom. (1842) S. 205. 206.



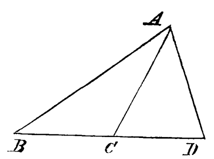
5. Drei Punkte B, C, D einer Geraden sind mit einem beliebigen Punkte A ausserhalb derselben verbunden. — Fällt man $AE \perp BD$, so ist (4.)

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2\ EC \cdot BC$$
$$AD^2 = AC^2 + CD^2 + 2\ EC \cdot CD.$$

Wenn man die erste dieser Gleichungen mit CD, die zweite mit BC multiplicirt und die Resultate addirt, so erhält man

$$AB^2 \cdot CD + AD^2 \cdot BC = AC^2 \cdot BD + BC \cdot CD \cdot BD.$$

Matthew Stewart: General theorems of consid. use etc. (Edinb. 1746).



Zus. 1. Ist C die Mitte von BD, so geht die letzte Gleichung über in: $AB^2 + AD^2 = 2\ AC^2 + 2\ BC^2$.

Serenos (im 2. Jahrh. v. Chr.): De sectione coni (Halley, S. 16). — Pappos VII; 122.

Die Summe $AB^2 + AD^2$ behält für die festen Punkte B, C, D unverändert ihren Werth, so lange A auf dem Kreise bleibt, welcher mit dem Radius CA um C beschrieben werden kann.

Zus. 2. Ist $AB = AD$, so geht die Stewart'sche Gleichung in die folgende über:

$$AB^2 - AC^2 = BC \cdot CD.$$

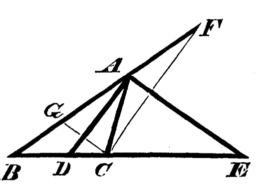
Ebenso erhält man aus der Voraussetzung $AB = AC$:

$$AD^2 - AC^2 = BD \cdot CD.$$

Wenn man in einem gleichschenkligen Dreiecke durch eine von der Spitze ausgehende Ecklinie die Grundlinie theilt, so ist der Unterschied aus den Längenquadraten der Ecklinie und eines Schenkels dem Längenprodukte aus den Abschnitten der Grundlinie gleich.

Pappos (Samml. VII; 154) erwähnt diesen Satz.

6. In dem Dreiecke ABC sei der Dreieckswinkel BAC und sein Nebenwinkel halbirt durch zwei Gerade, welche BC in D und E treffen. — Ein mit dem Radius AC um A beschriebener Kreis schneide die Strecke AB in G, ihre Verlängerung über A hinaus in F. Nun ist $FC \parallel AD$, $GC \parallel AE$ (§ 13; 7) und $AC = AG = AF$,



$$\therefore BA : AF = BD : DC,$$

oder I. $BA : AC = BD : DC$;

$$BA : GA = BE : CE,$$

oder II. $BA : AC = BE : CE.$

Aus I. und II. folgt $BD : DC = BE : CE$,

oder III. $BD \,.\, CE = BE \,.\, DC$. (Vgl. S. 134.)

Die Gleichungen I. und II. drücken folgenden Satz aus:

Die Halbirungslinie eines Dreieckswinkels wie die seines Nebenwinkels schneidet die gegenüber liegende Seitenlinie so, dass die zwischen dem Schnittpunkte und den beiden Ecken liegenden Strecken sich wie die anstossenden Seitenstrecken verhalten.

Eukl. VI; 3, ergänzt von R. Simson: The Elements of Euclid (1762). Die Gleichung III. hat Pappos (VII; 156) auf anderem Wege abgeleitet.

7. In dem Dreiecke ABC werde BC von der Halbirungslinie des Winkels BAC in D, von der Halbirungslinie seines Nebenwinkels in E geschnitten.

Setzt man $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, so ist (6.)

$$c : b = BD : DC; \; c : b = BE : CE;$$

$$\therefore (b + c) : b = a : DC; \; (c - b) : b = a : CE,$$

$$(b + c) : c = a : BD; \; (c - b) : c = a : BE,$$

$$DC = \frac{ab}{b + c}; \; BD = \frac{ac}{b + c}; \; CE = \frac{ab}{c - b}; \; BE = \frac{ac}{c - b}.$$

Nun ist nach dem Stewart'schen Satze (5.)

$$b^2 \,.\, BD + c^2 \,.\, DC = AD^2 \,.\, a + BD \,.\, DC \,.\, a;$$

$$AE^2 \,.\, a + c^2 \,.\, CE = b^2 \,.\, BE + BE \,.\, CE \,.\, a;$$

$$\therefore AD^2 = \frac{b^2c + bc^2}{b + c} - \frac{a^2bc}{(b + c)^2} = bc - BD \,.\, DC;$$

$$AE^2 = \frac{a^2bc}{(c - b)^2} - \frac{bc^2 - b^2c}{c - b} = BE \,.\, CE - bc.$$

Das Längenquadrat der Halbirungslinie eines Dreieckswinkels oder seines Nebenwinkels ist dem Unterschiede aus den Längenprodukten seiner Schenkel und der Abschnitte der dritten Seitenlinie gleich.

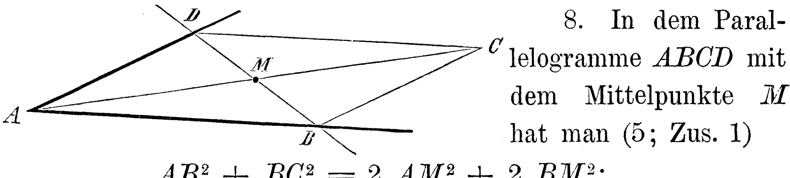
S. H. van Swinden: Geom. 206.

Setzt man für die Abschnitte von BC ihre Werthe ein, so ergiebt sich:

$$AD^2 = \frac{bc\,(a+b+c)\,(b+c-a)}{(b+c)^2}$$

$$AE^2 = \frac{bc\,(a+c-b)\,(a+b-c)}{(c-b)^2}$$

Beisp.: Für $c = 64^m$, $b = 28^m$, $a = 69^m$ wird $AD = 28^m$.

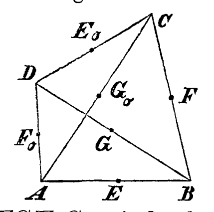


8. In dem Parallelogramme $ABCD$ mit dem Mittelpunkte M hat man (5; Zus. 1)

$$AB^2 + BC^2 = 2\,AM^2 + 2\,BM^2;$$
$$4\,AM^2 = AC^2;\ 4\,BM^2 = BD^2$$
$$\therefore\ 2\,AB^2 + 2\,BC^2 = AC^2 + BD^2.$$

In jedem Parallelogramme ist die Summe aus den Längenquadraten der vier Seitenstrecken der Summe aus den Längenquadraten der Diagonalen gleich.

Gregorius a Sancto Vincentio: Quadr. circuli (Antv. 1647), p. 33.



9. In dem vollständigen Vierecke $ABCD$ sind die Mitten der gegenüber liegenden Seitenstrecken AB und CD, BC und DA, BD und CA durch die Mittellinien EE_0, FF_0, GG_0 verbunden, welche die Diagonalen der drei Parallelogramme EFE_0F_0, FG_0F_0G, EGE_0G_0 sind (§ 32; 4. Zus. 3.). — Es sind aber die Seitenstrecken dieser Parallelogramme halb so gross wie die Seitenstrecken des vollständigen Vierecks, mit denen sie parallel laufen. Da nun

$$2\,EF^2 + 2\,FE_0{}^2 = EE_0{}^2 + FF_0{}^2,$$
$$2\,FG_0{}^2 + 2\,G_0F_0{}^2 = FF_0{}^2 + GG_0{}^2,$$
$$2\,EG^2 + 2\,GE_0{}^2 = EE_0{}^2 + GG_0{}^2,$$

$$\text{I.} \begin{cases} \therefore\ BD^2 + CA^2 = 2\ EE_0{}^2 + 2\ FF_0{}^2, \\ AB^2 + CD^2 = 2\ FF_0{}^2 + 2\ GG_0{}^2, \\ BC^2 + DA^2 = 2\ EE_0{}^2 + 2\ GG_0{}^2. \end{cases}$$

In einem vollständigen Vierecke ist die Summe aus den Längenquadraten zweier gegenüber liegender Seitenstrecken doppelt so gross, wie die Summe aus den Längenquadraten der beiden Mittellinien, welche die andern Seitenstrecken verbinden.

Subtrahirt man je 2 der Gleichungen I. von einander, so erhält man

$$\text{II.}\quad BD^2 + CA^2 + 2\ GG_0{}^2 = AB^2 + CD^2 + 2\ EE_0{}^2 = BC^2 + DA^2 + 2\ FF_0{}^2.$$

Subtrahirt man je eine der Gleichungen I. von der Summe der beiden andern, so folgt:

$$\text{III.} \begin{cases} AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = BD^2 + CA^2 + 4\ GG_0{}^2, \\ AB^2 + BD^2 + DC^2 + CA^2 = BC^2 + DA^2 + 4\ FF_0{}^2, \\ BD^2 + DA^2 + AC^2 + CB^2 = AB^2 + CD^2 + 4\ EE_0{}^2. \end{cases}$$

L. Euler: Nov. Comm. Petrop. I. (1750), S. 66.

Addirt man endlich alle drei Gleichungen I., so kommt

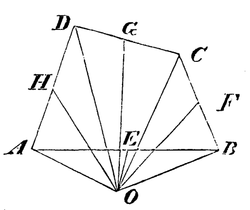
$$\text{IV.}\quad AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 + AC^2 + DB^2 = 4\ (EE_0{}^2 + FF_0{}^2 + GG_0{}^2).$$

Gergonne: Ann. II. p. 310.

Zusatz. Ist $AB \parallel CD$, also $ABCD$ ein Trapez, so wird $FF_0 \parallel AB \parallel CD$, $FG \parallel CD$, $F_0G_0 \parallel DC$, also liegen die 4 Punkte F, F_0, G, G_0 auf einer Geraden und es ist $FF_0 = \frac{1}{2}(AB + CD)$, $GG_0 = \frac{1}{2}(AB - CD)$, folglich (III.)

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = BD^2 + CA^2 + (AB - CD)^2$$
$$\therefore BC^2 + DA^2 + 2\ AB \,.\, CD = BD^2 + CA^2.$$

10. In einem Vierecke $ABCD$ sind die Ecken und die Mitten der Seitenstrecken E, F, G, H mit einem beliebigen Punkte O verbunden. — Dann ist (5. Zus. 1.)



$$OA^2 + OB^2 = 2\ OE^2 + \tfrac{1}{2}\ AB^2,$$
$$OB^2 + OC^2 = 2\ OF^2 + \tfrac{1}{2}\ BC^2,$$
$$OC^2 + OD^2 = 2\ OG^2 + \tfrac{1}{2}\ CD^2,$$
$$OD^2 + OA^2 = 2\ OH^2 + \tfrac{1}{2}\ DA^2;$$

$$\therefore\ 4\,(OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2) - 4\,(OE^2 + OF^2 + OG^2 + OH^2) = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2.$$

Allgemein:

Die Summe aus den Längenquadraten der Seitenstrecken eines *n*ecks ist viermal so gross wie die Summe aus den Längenquadraten der Abstände eines beliebigen Punktes von den Ecken vermindert um die Summe aus den Längenquadraten der Abstände desselben Punktes von den Mitten der Seitenstrecken.

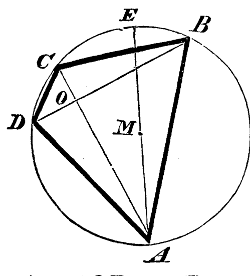
Produzioni mathematiche del Conte G. C. di Fagnano (Pesaro 1750) Vol. II.

Zusatz. Für ein Dreieck ABC, in welchem drei Ecklinien, die nach den Mitten der gegenüber liegenden Seitenstrecken gehen, einander in dem Schwerpunkte O schneiden (§ 42; 6. Zus.), ergiebt sich aus dem vorstehenden Satze

$$3\,(OA^2 + OB^2 + OC^2) = AB^2 + BC^2 + CA^2.$$

Die Summe aus den Längenquadraten der Seitenstrecken eines Dreiecks ist dreimal so gross wie die Summe aus den Längenquadraten der Abstände des Schwerpunktes von den Ecken.

L. Kunze: Geometrie. 2. Anhang III.



11. Die Diagonalen AC, BD des eingeschriebenen Vierecks $ABCD$ schneiden einander senkrecht in O. — Durch den Mittelpunkt M des Kreises geht der Durchmesser AE. Dann ist

$$\sphericalangle\ AOD = R = ABD + CAB = ABD + DBE$$

$$\therefore\ \sphericalangle\ CAB = DBE;\ \sphericalangle\ EAB = DAC.$$

$$\therefore\ CB = DE;\ EB = DC$$

$$\left.\begin{array}{l} AE^2 = AB^2 + BE^2 = AB^2 + CD^2 \\ AE^2 = AD^2 + DE^2 = BC^2 + DA^2 \end{array}\right\}\ (\S\ 42;\ 8)$$

$$\therefore\ 2\ AE^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2.$$

Wenn in einem eingeschriebenen (einfachen oder überschlagenen) Vierecke die Diagonalen einander rechtwinklig schneiden, so ist die Summe aus den

Längenquadraten der vier Seitenstrecken dem doppelten Längenquadrate des Durchmessers gleich.

Carnot: Géom. de pos. 132.

Zus. 1. Da $AB^2 = OA^2 + OB^2$, und $CD^2 = OC^2 + OD^2$ ist etc.

$$\therefore AE^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2.$$

Wenn zwei Sehnen oder Sekanten einander rechtwinklig schneiden, so ist die Summe aus den Längenquadraten ihrer Abschnitte dem Längenquadrate des Durchmessers gleich.

Archimedes: Lemmata. 11.

Zus. 2. Es ist $AC = AO + OC$, $BD = BO + OD$,

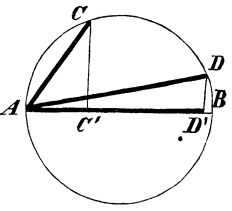
$$\therefore AC^2 = AO^2 + OC^2 + 2\ AO\ .\ OC,$$
$$BD^2 = BO^2 + OD^2 + 2\ BO\ .\ OD;$$

ferner (5; Zus. 2):

$$AO\ .\ OC = BO\ .\ OD = AM^2 - OM^2,$$
$$\therefore AC^2 + BD^2 = 8\ AM^2 - 4\ OM^2.$$

L. N. M. Carnot: Géom. de pos. 134.

Der Durchschnittspunkt der senkrechten Sehnen kann innerhalb oder ausserhalb des Kreises liegen. Die Differenz $8\ AM^2 - 4\ OM^2$ ist im ersten Falle grösser, im zweiten kleiner als $4\ AM^2$.

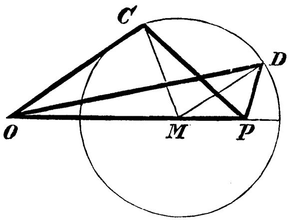


12. Aus dem Endpunkte A des Durchmessers AB eines Kreises sind zwei beliebige Sehnen AC, AD gezogen und mittels der Senkrechten CC', DD' auf den Durchmesser projicirt. Dann ist (§ 32; 8.)

$$AC^2 = AC'\ .\ AB;\ AD^2 = AD'\ .\ AB\ .$$
$$\therefore AC^2 : AD^2 = AC' : AD'.$$

Wenn man in einem Kreise eine jede von zwei Sehnen auf den durch ihren Endpunkt gehenden Durchmesser projicirt, so verhalten sich die Längenquadrate der Sehnen wie ihre Projectionen.

V. Viviani: De locis solidis secunda div. geom. (Flor. 1701). 9.



13. Zwei Punkte C, D eines Kreises um M sind mit dem Mittelpunkte und mit 2 Punkten O, P einer Geraden, die durch den Mittelpunkt geht, verbunden.

$$\left.\begin{aligned} OC^2 \,.\, MP + PC^2 \,.\, OM = MC^2 \,.\, OP + OM \,.\, MP \,.\, OP \\ OD^2 \,.\, MP + PD^2 \,.\, OM = MD^2 \,.\, OP + OM \,.\, MP \,.\, OP \end{aligned}\right\} (5.)$$

$$\therefore\ OC^2 \,.\, MP + PC^2 \,.\, OM = OD^2 \,.\, MP + PD^2 \,.\, OM;$$

$$(OC^2 - OD^2)\, MP = (PC^2 - PD^2)\, MO;$$

$$\frac{MO}{MP} = \frac{OC^2 - OD^2}{PC^2 - PD^2}.$$

Zusatz. Ist $OM = MP$, so folgt aus dieser Gleichung:

$$OC^2 + PC^2 = OD^2 + PD^2.$$

Th. Simpson: Elem. of Geometry (1760) III; 20. — Vgl. R. Simson: Apollonius ebene Oerter, übers. von Camerer, S. 263 ff.

14. Einem Kreise ist ein einfaches Viereck $ABCD$ eingeschrieben. — Man schneide von A aus einen Bogen $AE = CD$ auf derselben Seite der Diagonale AC ab und ziehe die Gerade BE, welche AC in O schneidet. Dann ist $\measuredangle\, ABO = DBC$ und $\measuredangle\, ABD = OBC$

$$\therefore\ ABO \backsim DBC,$$
$$OBC \backsim ABD;$$
$$\therefore\ AO : AB = DC : DB,$$
$$OC : BC = AD : BD;$$
$$AO \,.\, BD = AB \,.\, CD,$$
$$OC \,.\, BD = BC \,.\, AD;$$
$$\therefore\ AC \,.\, BD = AB \,.\, CD + BC \,.\, AD.$$

In dem einem Kreise eingeschriebenen einfachen Vierecke ist das Längenprodukt der Diagonalen der Summe aus den Längenprodukten der gegenüber liegenden Seitenstrecken gleich.

Dieser Satz heisst der „Ptolemäische Lehrsatz“, weil Claudius Ptolemäus (in der ersten Hälfte des zweiten Jahrhunderts zu Alexandrien in Aegypten lebend) ihn in seinem Almagest (I; 9) anführt. — Vgl. Möbius: Kreisverwandtschaft § 26. 44.

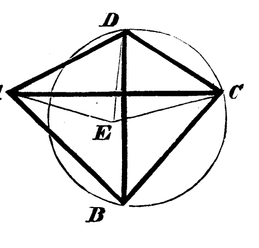
15. Sind a, b, c, d die auf einander folgenden Seitenstrecken

eines einfachen Sehnenvierecks, so können mit denselben ausser dem Viereck *abcd* noch die einfachen Sehnenvierecke *abdc* und *acbd* construirt werden. Das Viereck *abcd* hat die von a, b und c, d überspannte Diagonale f, sowie die von d, a und b, c überspannte g. In dem Vierecke *abdc*, welches aus *abdc* durch Vertauschung der Strecken c und d hervorgeht, ist ausser der Diagonale f die von c, a und b, d überspannte h vorhanden. Das Viereck *acbd* endlich hat g und h zu Diagonalen. (Setzt man in der Figur Nr. 14 : $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, so wird $AC = f$, $BD = g$, $BE = h$, $ABCE = abdc$).

Es ist nun nach dem Ptolemäischen Lehrsatze:

$$f \,.\, g = a \,.\, c + b \,.\, d$$
$$f \,.\, h = a \,.\, d + b \,.\, c$$
$$g \,.\, h = a \,.\, b + c \,.\, d.$$
$$\therefore f\,(a \,.\, b + c \,.\, d) = g\,(a \,.\, d + b \,.\, c) = h\,(a \,.\, c + b \,.\, d);$$
$$f^2 = \frac{(a \,.\, c + b \,.\, d)\,(a \,.\, d + b \,.\, c)}{a \,.\, b + c \,.\, d},$$
$$g^2 = \frac{(a \,.\, b + c \,.\, d)\,(a \,.\, c + b \,.\, d)}{a \,.\, d + b \,.\, c},$$
$$h^2 = \frac{(a \,.\, d + b \,.\, c)\,(a \,.\, b + c \,.\, d)}{a \,.\, c + b \,.\, d}.$$

A. Girard: Tables de sinus etc. La Haye 1626.



16. In dem hohlwinkligen Vierecke $ABCD$ sei $\sphericalangle\, DAC < DBC$. — Beschreibt man um das Dreieck BCD einen Kreis, so liegt A ausserhalb desselben (§ 25; 9. Zus.). Bestimmt man nun einen Punkt E so, dass $\sphericalangle\, EAD = CBD$ und $\sphericalangle\, ADE = BDC$ wird, und zieht EC, so ist $\triangle\, ADE \backsim BDC$,

$$\therefore AD : BD = ED : CD; \ \sphericalangle\, ADB = EDC;$$
$$\therefore ADB \backsim EDC.$$
$$\therefore AE : AD = BC : BD,$$
$$AB : BD = EC : CD;$$
$$\therefore AE \,.\, BD = BC \,.\, AD,$$
$$EC \,.\, BD = AB \,.\, CD;$$
$$\therefore (AE + EC)\, BD = AB \,.\, CD + BC \,.\, AD \,.$$
$$AE + EC > AC;$$
$$\therefore AC \,.\, BD < AB \,.\, CD + BC \,.\, AD.$$

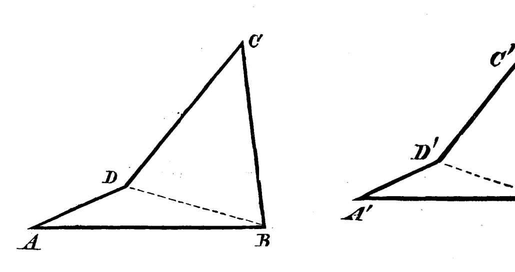
In einem hohlwinkligen Vierecke, dessen Ecken nicht auf einem Kreise liegen, ist das Längenprodukt der Diagonalen kleiner als die Summe der Längenprodukte aus den gegenüber liegenden Seitenstrecken.

Zusatz. Die Ecken eines hohlwinkligen Vierecks liegen auf einem Kreise, wenn das Längenprodukt seiner Diagonalen der Summe der Längenprodukte aus den gegenüber liegenden Seitenstrecken gleich ist.

L. Kunze a. a. O. § 165.

§ 44.

Die Aehnlichkeit der *n*ecke und Kreise.



1. In den Vierecken $ABCD$, $A'B'C'D'$ sei $\sphericalangle DAB = D'A'B'$, $\sphericalangle ABC = A'B'C'$, $\sphericalangle BCD = B'C'D'$ und $DA : AB = D'A' : A'B'$. — Nun ist

$$\triangle\ DAB \backsim D'A'B'\ (\S\ 42;\ 3);$$
$$\therefore \sphericalangle\ ABD = A'B'D'\ (\S\ 41;\ 4);$$
$$\therefore \sphericalangle\ DBC = D'B'C';\ \triangle\ BCD \backsim B'C'D'\ (\S\ 42;\ 2).$$
$$\triangle\ ABC \backsim A'B'C'.$$
$$\therefore ABCD \backsim A'B'C'D'\ (\S\ 41;\ 1.\ \text{Zus.}).$$

Zwei Vierecke sind ähnlich, wenn sie in drei Winkeln in gleicher Folge und dem Verhältnisse zweier Seitenstrecken, die gleiche Winkel einschliessen, übereinstimmen.

2. In den Vierecken $ABCD$, $A'B'C'D'$ sei $\sphericalangle\ DAB = D'A'B'$, $\sphericalangle\ ABC = A'B'C'$, $DA : AB = D'A' : A'B'$ und $AB : BC = A'B' : B'C'$. — Nun ist

$$\triangle\ DAB \backsim D'A'B';$$
$$\therefore \sphericalangle\ DBC = D'B'C';\ DB : BC = D'B' : B'C';$$
$$\therefore BCD \backsim B'C'D',$$
$$ABCD \backsim A'B'C'D'.$$

Zwei Vierecke sind ähnlich, wenn sie in den beiden einer Seitenstrecke anliegenden Winkeln und den Verhältnissen der sie einschliessenden Seitenstrecken übereinstimmen.

3. Wenn in den Vierecken $ABCD$, $A'B'C'D'$ ist $AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = DA : D'A'$ und $\sphericalangle ABC = A'B'C'$ — so ist

$$\triangle ABC \backsim A'B'C'; \therefore \triangle CDA \backsim C'D'A'.$$
$$ABCD \backsim A'B'C'D'.$$

Zwei Vierecke sind ähnlich, wenn sie in den Verhältnissen ihrer Seitenstrecken in gleicher Folge, und einem von proportionirten Seitenstrecken gebildeten Winkel übereinstimmen.

4. In den Vierecken $ABCD$, $A'B'C'D'$ sei

$$AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C' = CD : C'D' = DA : D'A'.$$

Nun ist (§ 42; 1)

$$ABC \backsim A'B'C'; \; ADC \backsim A'D'C';$$
$$\therefore ABCD \backsim A'B'C'D' \; (3).$$

Zwei Vierecke sind ähnlich, wenn ihre Seitenstrecken und eine Diagonale in gleicher Folge proportionirt sind.

Anmerk. Zur Bestimmung der Aehnlichkeit zweier Vierecke sind hiernach nothwendig und ausreichend:

1. drei Winkel und ein Streckenverhältniss;
2. zwei Winkel und zwei Streckenverhältnisse;
3. ein Winkel und drei Streckenverhältnisse;
4. vier Streckenverhältnisse.

5. Ein $n$eck lässt sich durch Diagonalen in n-2 Dreiecke zerlegen (§ 9; 4). Zwei $n$ecke zerfallen durch eine solche Zerlegung mittels entsprechender Strecken in $n-2$ Dreieckspaare. Sind diese Dreieckspaare der Reihe nach ähnlich, so sind auch die $n$ecke ähnlich (§ 41; 1. Zus.). Da nun die Aehnlichkeit zweier Dreiecke von der Gleichheit zweier Bestimmungsstücke (Winkel und Streckenverhältnisse) abhängt, so ist zur Bestimmung der Aehnlichkeit zweier $n$ecke die Uebereinstimmung derselben in $2(n-2) = 2n-4$ Bestimmungsstücken erforderlich, unter denen sich höchstens $n-1$ $n$eckswinkel, also mindestens $n-3$ Streckenverhältnisse befinden.

Zusatz. Regelmässige *n* ecke sind ähnlich, wenn sie in der Anzahl der Ecken und in ihren Winkeln übereinstimmen.

6. Es seien die *n* ecke $ABCD\,..\,G$ und $A'B'C'D'\,..\,G'$ ähnlich. — Nun ist (§ 41; 5):

$$AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = \ldots = GA : G'A'.$$

$$\therefore \frac{AB}{A'B'} = \frac{AB + BC + CD + \,..\, + GA}{A'B' + B'C' + C'D' + \,..\, + G'A'}.$$

Zerlegt man die ähnlichen *n* ecke durch entsprechende Diagonalen in ähnliche Dreiecke, z. B. $GAB \backsim G'A'B'$, $GBC \backsim G'B'C'$, $GCD \backsim G'C'D'\,..$, so ist (§ 42; 5)

$$\overline{GAB} : \overline{G'A'B'} = AB^2 : A'B'^2;\ \overline{GBC} : \overline{G'B'C'} = BC^2 : B'C'^2\,..$$

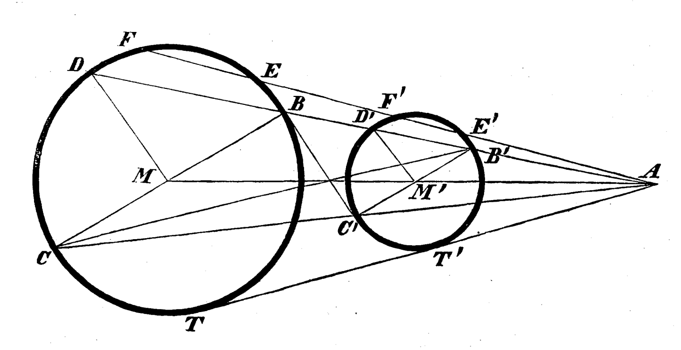
$$\therefore \frac{\overline{GAB} + \overline{GBC} + \overline{GCD} + \,..}{\overline{G'A'B'} + \overline{G'B'C'} + \overline{G'C'D'} + \,..} = \frac{AB^2}{A'B'^2} = \frac{BC^2}{B'C'^2} = \,..$$

$$\overline{ABCD\,..\,G} : \overline{A'B'C'D'\,..\,G'} = AB^2 : A'B'^2.$$

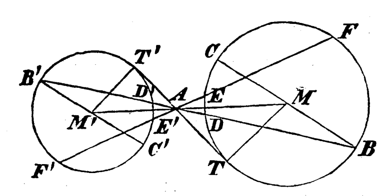
$$\overline{ABCD\,..\,G} : \overline{A'B'C'D'\,..\,G'} = (AB + BC + CD + \,..\, + GA)^2 : (A'B' + B'C' + \,..\, + G'A')^2.$$

Die Flächen ähnlicher *n* ecke verhalten sich wie die Längenquadrate ihrer Umfänge oder je zweier entsprechender Strecken.

Eukl. VI; 20.



7. Um die Punkte M und M' als Mittelpunkte seien Kreise mit den Halbmessern r und ϱ beschrieben. — Man ziehe durch M und M' zwei parallele Durchmesser $BC \parallel B'C'$. Die Radien MB und $M'B'$ haben entweder gleiche, oder entgegengesetzte Richtung.



Wird nun die Centrale MM' von BB' in A geschnitten, so muss auch CC' durch A gehen, weil

$$AM : AM' = \mathrm{r} : \varrho = MB : M'B' = MC : M'C'$$

und $MB \parallel M'B'$, $MC \parallel M'C'$ ist (§ 32; 8).

Ist D der zweite Durchschnitt der Geraden AB und des Kreises um M, und zieht man aus M' nach AD die Gerade $M'D' \parallel MD$, so ist

$$AM : AM' = \mathrm{r} : \varrho = MD : M'D' = \mathrm{r} : M'D';$$
$$\therefore \varrho = M'D'.$$

D' liegt also auf dem Kreise um M'. Schneidet nun eine durch A gehende Gerade den Kreis um M in E und F, und zieht man nach dieser Geraden $M'E' \parallel ME$ und $M'F' \parallel MF$, so liegen E' und F' auf dem Kreise um M'. — Zieht man aus A eine Tangente an den Kreis M, welche ihn in T berührt, und fällt aus M' die Senkrechte $M'T'$ auf AT, so ist

$$AM : AM' = \mathrm{r} : \varrho = MT : M'T' = \mathrm{r} : M'T';$$
$$\therefore M'T' = \varrho.$$

Der Kreis M' wird demnach von AT in M berührt.

A ist der äussere oder innere Aehnlichkeitspunkt der Kreise um M und M'; denn man hat $AB : AB' = AE : AE' = \mathrm{r} : \varrho$; $\therefore BE \parallel B'E'$ (§ 41; 1. 3).

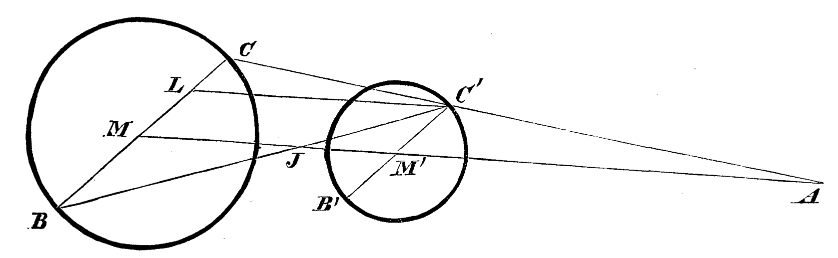
Mit den vereinigten Mittelpunkten zweier concentrischer Kreise fallen auch die beiden Aehnlichkeitspunkte zusammen.

Zwei Kreise mit gesonderten Mittelpunkten haben einen äusseren und einen inneren Aehnlichkeitspunkt.

Zusatz. Die Schenkel gleicher Centriwinkel schliessen ähnliche Flächen und ähnliche Bogen ein.

P. Herigone: Cursus mathematicus I. (1644), p. 325. — R. Simson: Apollonius ebene Oerter, wieder hergestellt S. 37—40 der Uebersetzung von Camerer. — J. Steiner: Crelle's J. I. (1826), S. 169 ff.

8. In den Kreisen um M und M' seien die parallelen



Durchmesser BC und $B'C'$ gezogen, BC' gehe durch den inneren Aehnlichkeitspunkt J, CC' durch den äusseren A. Auf MC liege der Punkt L so, dass $LC' \parallel MM'$ ist. Endlich sei $MC = r$, $M'C' = \varrho$, $MM' = d$. — Nun ist

$$AMC \backsim AM'C' \backsim C'LC;$$

$$\therefore AM : MC = C'L : LC, \text{ oder } AM : r = d : (r - \varrho);$$
$$AM' : M'C' = C'L : LC, \text{ oder } AM' : \varrho = d : (r - \varrho).$$

$$JMB \backsim JM'C' \backsim C'LB;$$

$$\therefore JM : MB = C'L : LB, \text{ oder } JM : r = d : (r + \varrho);$$
$$JM' : M'C' = C'L : LB, \text{ oder } JM' : \varrho = d : (r + \varrho).$$

$$AM = \frac{dr}{r - \varrho}; \quad AM' = \frac{d\varrho}{r - \varrho};$$

$$JM = \frac{dr}{r + \varrho}; \quad JM' = \frac{d\varrho}{r + \varrho}.$$

$$AM : AM' = MJ : JM' = r : \varrho.$$

Die vier Punkte A, M', J, M sind harmonisch, und zwar A und J, sowie M und M', einander zugeordnet (§ 40).

Aus den vorstehenden Gleichungen folgt:

I. Wenn $d = r + \varrho$ ist, die Kreise einander also von aussen berühren (§ 30; 2. I.), so wird

$$JM = r, \; JM' = \varrho.$$

Wenn zwei Kreise einander von aussen berühren, so fällt ihr innerer Aehnlichkeitspunkt mit dem Berührungspunkte zusammen.

Pappos VII; 102. 104. 110.

II. Wenn $d = r - \varrho$ ist, die Kreise einander also von innen berühren (§ 30; 2. II.), so wird

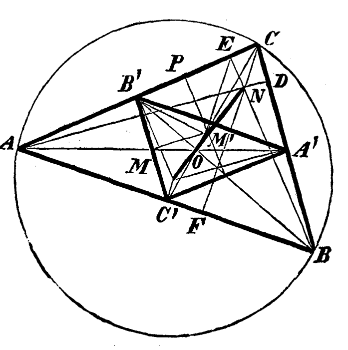
$$AM = r, \; AM' = \varrho.$$

Wenn zwei Kreise einander von innen berühren, so fällt ihr äusserer Aehnlichkeitspunkt mit dem Berührungspunkte zusammen.

Pappos VII; 106.

Zusatz. Jeder Aehnlichkeitspunkt liegt zugleich ausserhalb oder innerhalb beider Kreise.

9. In dem Dreiecke ABC schneiden einander die aus den Ecken nach den Mitten der gegenüber liegenden Seitenstrecken gehenden Geraden AA', BB', CC' in O (§ 42; 6). Die Mittelpunkte der Kreise, welche den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ umgeschrieben sind (24; 9), seien M und M'. Die drei Höhen des Dreiecks, AD, BE, CF schneiden einander in N (§ 30; 7). — Nun ist O der innere Aehnlichkeitspunkt der beiden Dreiecke ABC und $A'B'C'$, und



$$AO : A'O = BO : B'O = CO : C'O = 2 : 1 \text{ (§ 42; 6. II.)}.$$

Die Geraden AA', BB', CC' sind mithin auch Aehnlichkeitsstrahlen der den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ umgeschriebenen Kreise mit den Mittelpunkten M und M'. Die Punkte M, O, M' befinden sich also auf einer Geraden, welche der innere Aehnlichkeitspunkt O der beiden Kreise so theilt, dass

$$OM : OM' = 2 : 1.$$

Die Punkte M und N sind, als die Durchschnitte der Höhen in den Dreiecken $A'B'C'$ und ABC, entsprechende Punkte, sie liegen daher auf einem Aehnlichkeitsstrahle, und es ist

$$NO : MO = 2 : 1;$$
$$\therefore MM' = M'N;$$
$$\therefore M'O : OM : M'M : NM = 1 : 2 : 3 : 6.$$

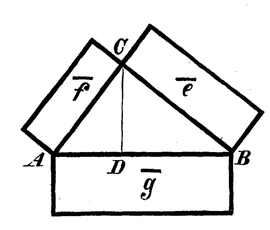
Fällt man aus M' eine Senkrechte $M'P$ auf AC, so ist, weil $NE \parallel MB'$ und $NM' = M'M$:

$$EP = PB';$$
$$\therefore M'B'P \cong M'EP;\ M'B' = M'E.$$

Der Kreis um $A'B'C'$ ist also auch dem Dreiecke DEF umgeschrieben.

In jedem Dreiecke liegen auf einer Geraden folgende vier Punkte: der Schwerpunkt, der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises, der Durchschnitt der Höhen und der Mittelpunkt des Kreises, welcher durch die Fusspunkte der Höhen und die Mittelpunkte der Seitenstrecken geht.

L. Euler: Novi Comm. Petrop. T. 11. — K. W. Feuerbach: Geradliniges Dreieck (Nürnberg 1822) § 54—56. 60. — J. Steiner: Geometr. Constructionen (Berlin 1833) S. 49 — 53.



10. Ueber den Seitenstrecken BC, CA, AB des bei C rechtwinkligen Dreiecks ABC seien ähnliche Gebilde mit den Flächen $\overline{e}$, $\overline{f}$, $\overline{g}$ so verzeichnet, dass die Seitenstrecken des Dreiecks entsprechende Strecken derselben sind. — Nun ist (6.)

$$\overline{e} : \overline{f} : \overline{g} = BC^2 : CA^2 : AB^2.$$

Fällt man aus C auf AB die Senkrechte CD, so ist (§ 42; 8)

$$BCD \backsim CAD \backsim BAC.$$

$$\therefore \overline{BCD} : \overline{CAD} : \overline{BAC} = BC^2 : CA^2 : AB^2;$$

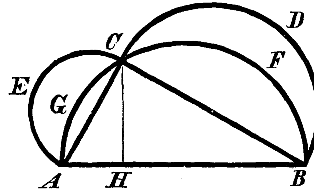
$$\therefore \overline{e} : \overline{f} : \overline{g} = \overline{BCD} : \overline{CAD} : \overline{BAC}.$$

$$\overline{BCD} + \overline{CAD} = \overline{BCA};$$

$$\therefore \overline{e} + \overline{f} = \overline{g}.$$

Wenn die Seitenstrecken eines rechtwinkligen Dreiecks entsprechende Strecken ähnlicher Gebilde sind, so ist die Summe der Flächen derselben über den Katheten der Fläche über der Hypotenuse gleich.

Eukl. VI; 31.



11. Ueber den Seitenstrecken des bei C rechtwinkligen Dreiecks ABC seien drei Halbkreise beschrieben, die den Punkt C gemein haben und durch $AGFB$, AEC und CDB bezeichnet werden. — Da die Halbkreise ähnliche Gebilde sind (7. Zus.), so ist (10.)

$$\overline{AGFB} = \overline{AEC} + \overline{CDB}.$$

Subtrahirt man auf beiden Seiten dieser Gleichung die gemeinschaftlichen Flächen $\overline{AGC}$ und $\overline{CFB}$, so ergiebt sich

$$\overline{ABC} = \overline{BDCF} + \overline{CEAG}.$$

Nennt man einen aus zwei Kreisbogen bestehenden Linienzug einen Mond (μηνίσκος, lunula), so kann man die letzte Gleichung wörtlich so ausdrücken:

Die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks ist der Summe der beiden Mondflächen gleich, welche

durch die über den Seitenstrecken beschriebenen Halbkreise ausserhalb des Dreiecks gebildet werden.

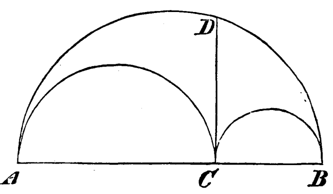
B. Lamy: Élémens de géom. (1695). IV; 177.

Zusatz. Ist das rechtwinklige Dreieck ABC gleichschenklig, also $BC = AC$, und man fällt aus C auf AB die Senkrechte CH, so kann man H als den Mittelpunkt eines Quadrats betrachten, dessen zwei Seitenstrecken BC und CA sind, und man erhält den Satz:

Die vier Mondflächen, welche von dem einem Quadrate umgeschriebenen Kreise und den nach aussen über den Seitenstrecken beschriebenen Halbkreisen gebildet werden, sind der Fläche des Quadrats gleich.

Hippokrates von Chios (um 430 vor Chr.) ist nach dem Berichte des Simplikios (Comment. in octo Arist. phys. ausc. libros. Venetiis 1526) der Entdecker dieses Satzes: C. A. Bretschneider, Geometrie etc. vor Euklides (Leipzig 1870) S. 100 ff.

12. Ueber einer Strecke AB, wie über ihren beiden Theilen AC, CB seien Halbkreise beschrieben, und es treffe die im Theilungspunkte C auf AB errichtete Senkrechte den Halbkreis über AB in D. — Nun ist



$$CD^2 = AC \,.\, CB \quad (\S\ 42;\ 8);$$
$$AB^2 = (AC + CB)^2 = AC^2 + CB^2 + 2 \,.\, CD^2$$
$$\therefore\ CD^2 = \tfrac{1}{2}\,(AB^2 - (AC^2 + CB^2)).$$

Sind $(\overline{AB})$, $(\overline{AC})$, $(\overline{CB})$, $(\overline{CD})$ die Flächen der Kreise mit den Durchmessern AB, AC, CB, CD, so ist

$$(\overline{CD}) = \tfrac{1}{2}\,\left((\overline{AB}) - \overline{[(AC) + (CB)]}\right).$$

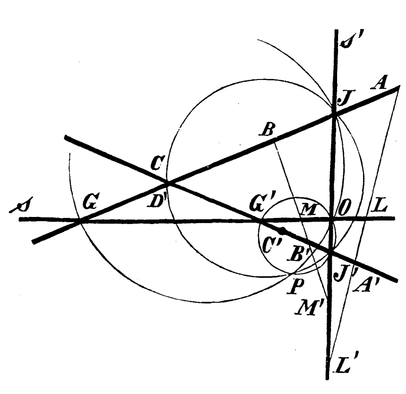
Die von den drei Halbkreisen begrenzte Fläche, welche Archimedes Arbelos nennt, ist der Fläche eines Kreises gleich, dessen Durchmesser CD ist.

Archimedes, lemma 4.

§ 45.

Aehnliche Gebilde in schiefer Lage.

1. Zwei ähnliche Punktreihen $ABCD$ . ., $A'B'C'D'$ . . schneiden einander in dem Punkte CD'. — Es sind zuerst die näheren entsprechenden Punkte G und G', dann



die entfernteren J und J' zu bestimmen, deren Abstände von dem Durchschnitte C der Punktreihen einander gleich sind: $GC = G'C$ und $JC = J'C$ (§ 40). Dann beschreibt man über den entsprechenden Strecken GJ und $G'J'$ als Durchmesser zwei Kreise, deren Durchschnitte die Punkte O und P sind, und von denen O der Durchschnitt der Situationsaxen ist (§ 40). Nun ist

$$\sphericalangle\, GPJ = G'PJ' = 90^0;\ \sphericalangle\, GJP = GOP = G'J'P;$$
$$\therefore\ \sphericalangle\, PJA = PJ'A';\ \sphericalangle\, PJB = PJ'B';$$
$$\therefore\ PJG \backsim PJ'G' \text{ (§ 42; 2.)};\ PJA \backsim PJ'A';\ PJB \backsim PJ'B'$$
$$PAB \backsim PA'B';$$
$$\therefore\ \sphericalangle\, GPG' = JCJ' = JPJ' = APA' = BPB'.$$

Der Punkt P liegt also (§ 25; 10) auf jedem Kreise, welcher durch zwei entsprechende Punkte und durch den Durchschnitt der Punktreihen geht.

Ferner folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke

$$PA : PA' = PB : PB' = PJ : PJ' = PG : PG';$$
$$\therefore\ \triangle\ PAA' \backsim PBB' \backsim JPJ' \backsim GPG'.$$

Es ist ferner

$$\sphericalangle\, OGJ = OG'J';\ \therefore\ \triangle\ OGJ \backsim OG'J' \text{ (§ 42; 2)};$$
$$\therefore\ \triangle\ OJA \backsim OJ'A';\ OJB \backsim OJ'B';\ OAB \backsim OA'B';$$
$$\therefore\ OA : OA' = OJ : OJ' = OB : OB' = AB : A'B'.$$

Werden nun die Situationsaxen GG' und JJ' von AA' in L und L', von BB' in M und M' geschnitten, so ist (§ 40):

$$JA : J'A' = AB : A'B' = AL : LA' = L'A : L'A' =$$
$$= BM : MB' = M'B : M'B'.$$

Die Winkel AOA', BOB' u. s. w. werden also durch die Axe GG', ihre Nebenwinkel durch die Axe JJ' halbirt. Hingegen werden die Winkel APA', JPJ, BPB' u. s. w. durch die Geraden PL, PO, PM, ihre Nebenwinkel durch PL' u. s. w. halbirt (§ 43; 6).

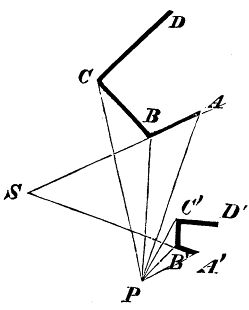
Nennt man nun einen Punkt, welcher — wie O und P — mit den Endpunkten je zweier entsprechender Strecken ähnlicher

Gebilde in schiefer Lage als selbstentsprechender Punkt ähnliche Dreiecke bildet, einen Situationspunkt dieser Gebilde, und bezeichnet ihn als gleichwendig oder gegenwendig, je nachdem die ähnlichen Dreiecke es sind: so lässt sich das Wesentlichste der vorhergehenden Entwicklung so zusammenfassen:

Zwei ähnliche Punktreihen in schiefer Lage haben einen gleichwendigen und einen gegenwendigen Situationspunkt, die Durchschnitte der Kreise, welche über den von den Situationsaxen auf jeder Punktreihe begrenzten Strecken beschrieben werden.

Zusatz. Da der Punkt P in den ähnlichen Dreiecken PAA', PBB', PJJ', PGG' u. s. w. sich selbst entspricht, so kann man die beiden Punktreihen durch eine Drehung der einen gleich $APA' = BPB' = GPG'$ um den gleichwendigen Situationspunkt P so in perspectivische Lage bringen, dass P zum äusseren Aehnlichkeitspunkte wird. Durch eine Drehung gleich $GCG' = 180^0 - APA'$ lässt sich P zum inneren Aehnlichkeitspunkte der Punktreihen machen.

2. Es seien $ABCD\,..$, $A'B'C'D'\,..$ zwei ähnliche und gleichwendige $n$ecke in schiefer Lage. — Ist P der gleichwendige Situationspunkt der entsprechenden Strecken AB und $A'B'$, mithin (1.) $\triangle PAB \backsim PA'B'$, so ergiebt sich sofort:



$$PBC \backsim PB'C'; \; PCD \backsim PC'D'; \; \therefore\,.$$

P ist demnach der gleichwendige Situationspunkt aller entsprechenden Strecken. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke folgt weiter

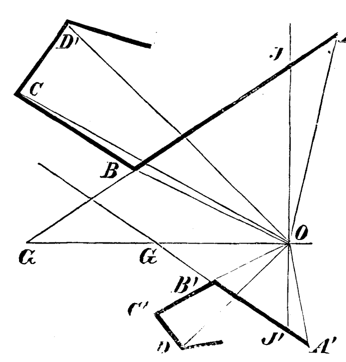
$$\measuredangle\, APA' \backsim BPB' \backsim CPC' \backsim DPD'\;..$$

Die beiden $n$ecke gelangen also in perspectivische Lage, wenn man das eine um P gleich APA' oder dem Betrage seines Nebenwinkels so dreht, dass die entsprechenden Strecken PA und PA' auf einander fallen.

Zwei ähnliche und gleichwendige $n$ecke in schiefer Lage haben einen gleichwendigen Situationspunkt.

Zusatz. Treffen die Geraden AB und $A'B'$ in S zusammen, so gehen die Kreise SAA' und SBB' durch P (1.). Aus demselben Grunde schneiden einander diejenigen Kreise im Situationspunkte P, welche durch den Durchschnitt von BC und $B'C'$, sowie durch B und B', C und C' gehen. Allgemein:

In zwei schiefliegenden ähnlichen und gleichwendigen $n$ecken schneiden einander alle Kreise im Situationspunkte, welche durch zwei entsprechende Punkte und den Durchschnitt der entsprechenden Geraden gehen, auf denen jene Punkte liegen.



3. Es seien $ABCD$ . ., $A'B'C'D'$ . . zwei ähnliche und gegenwendige $n$ecke in schiefer Lage. — Ist O der gegenwendige Situationspunkt der entsprechenden Strecken AB und $A'B'$, mithin (1.) $\triangle\ OAB \backsim OA'B'$, so ergiebt sich sofort

$$OBC \backsim OB'C'; \ OCD \backsim OC'D' \ . \ . \ .$$

O ist demnach der gegenwendige Situationspunkt aller entsprechenden Strecken.

Von den beiden Situationsaxen der Strecken AB und $A'B'$, die einander in O senkrecht schneiden (§ 40), sei GG' die innere, JJ' die äussere. Dreht man nun gleich 180^0 das eine $n$eck, etwa $A'B'C'$ . .

I. um die innere Situationsaxe GG' als Drehungsaxe, so wird O zum äusseren Aehnlichkeitspunkte der beiden $n$ecke;

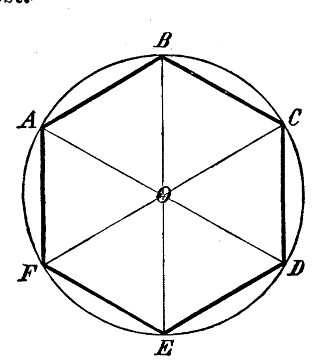
II. um die äussere Situationsaxe JJ' als Drehungsaxe, so wird O zum inneren Aehnlichkeitspunkte der $n$ecke $ABCD$ . . und $A'B'C'D'$ . .

Zwei ähnliche und gegenwendige $n$ecke in schiefer Lage haben einen gegenwendigen Situationspunkt, welcher nach einer halben Umdrehung des einen $n$ecks um die innere oder äussere Situationsaxe zum äusseren oder inneren Aehnlichkeitspunkte derselben wird.

§ 46.

Der Zusammenhang zwischen dem Radius eines Kreises, den Umfängen der ihm ein- und umgeschriebenen regulären Vielecke und dem Kreise selbst.

1. In dem Kreise um O, dessen Radius r ist, seien die Sehnen $AB = BC = r$. — Dann sind die Dreiecke AOB und BOC regelmässig, mithin $\sphericalangle\ AOB = BOC = \frac{2}{3}\ R$.



Die Sehnen AB, BC bilden also Seitenstrecken eines eingeschriebenen regelmässigen Sechsecks, dessen Umfang $6r$ beträgt.

Der Umfang eines eingeschriebenen regelmässigen Sechsecks ist dreimal so gross, wie der Durchmesser des Kreises.

2. Das Viereck $OABC$ ist ein Rhombus, seine Diagonale OB ein Radius, die Diagonale AC eine Seitenstrecke des eingeschriebenen regulären Dreiecks; OB und AC halbiren einander also senkrecht (§ 21; 2. 6). Daher ist

$$\left(\frac{AC}{2}\right)^2 = AO^2 - \left(\frac{OB}{2}\right)^2, \text{ oder } \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2$$

$$\therefore\ AC^2 = 3\ r^2.$$

Das Längenquadrat der Seitenstrecke eines regulären eingeschriebenen Dreiecks ist dem dreifachen Längenquadrate des Radius gleich.
Eukl. XIII; 12.

Zusatz. Der Umfang des regulären eingeschriebenen Dreiecks ist $3r\sqrt{3}$.

3. Zieht man nach den Endpunkten der Seitenstrecke a eines eingeschriebenen Quadrats Radien, so ergiebt sich:

$$a^2 = 2\ r^2.$$



4. In dem Kreise um M, dessen Radius r ist, seien die Sehnen AB, BC die Seitenstrecken eines regelmässigen eingeschriebenen 10ecks und 5ecks; die Sehne AC werde von dem Radius MB in D geschnitten. — Da also

$$\sphericalangle AMB = \tfrac{2}{5} R, \sphericalangle BMC = \tfrac{4}{5} R,$$
$$\therefore \sphericalangle MAC = MCA = CAM = \tfrac{2}{5} R,$$
$$\sphericalangle ABD = BDA = MDC = \tfrac{4}{5} R;$$
$$\therefore AB = AD = MD \text{ und}$$
$$MB = MC = CD = r.$$
$$\triangle MAB \backsim ABD;$$
$$\therefore AB : MA = BD : AB;$$
$$\therefore BD : DM = DM : BM.$$

$DM = AB$ ist also der grössere Abschnitt des stetig getheilten Radius.

Der grössere Abschnitt eines stetig getheilten Kreisradius ist der Seitenstrecke des eingeschriebenen regelmässigen Zehnecks gleich.

Pappos: Math. collect. V; 47. — Eukl. IV; 10.

Zus. 1. Es ist (§ 42; 13. Zus. 1. 2) die Seitenstrecke des Zehnecks

$$AB = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Zus. 2. Es ist $\triangle ABD \backsim CMD$

$$\therefore BD : DM = AD : DC.$$

Addirt man 1 zu dieser Gleichung, so ergiebt sich:

$$BM : DM = AC : DC,$$
$$\therefore AD : DC = DC : AC.$$

Die Sehne AC ist also auch stetig getheilt.

5. In der Figur unter Nr. 4 ist (§ 43; 5. Zus. 2)

$$BC^2 - DC^2 = MB.DB; \; AM^2 - AD^2 = MB \,.\, MD;$$

$$\therefore BC^2 - AD^2 = MB^2; \; BC^2 = AB^2 + r^2 = r^2 \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right).$$

Das Längenquadrat der Seitenstrecke des regulären eingeschriebenen Fünfecks ist der Summe

aus den Längenquadraten der Seitenstrecke des Sechsecks und Zehnecks gleich.

Eukl. XIII; 10.

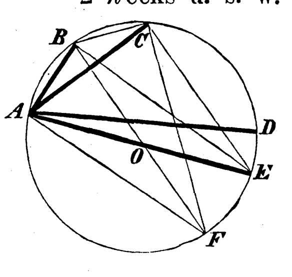
Zus. 1. In dem Kreise um O sei AB ein Durchmesser, C die Mitte von OA, der Radius $OD \perp AB$, $CE = CD$.

$$\therefore\ CD^2 = CE^2 = \frac{5\,r^2}{4};\ OE = \frac{r}{2}\,(\sqrt{5}-1),$$

$$DE^2 = r^2\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Ptolemäus: Almag. I.

6. In den folgenden allgemeineren Entwicklungen sei
s_n eine Seitenstrecke, $e_n = n.s_n$ der Umfang des regul. Sehnen-$n$ecks,
s_{2n} „ „ , $e_{2n} = 2n.s_{2n}$ „ „ „ „ „ 2$n$ecks u. s. w.;
t_n „ „ , $u_n = n.t_n$ „ „ „ regul. Tangenten-$n$ecks,
t_{2n} „ „ , $u_{2n} = 2n.t_{2n}$ „ „ „ „ Tangenten-2$n$ecks u. s. w.



In dem Kreise um O seien die Bogen $AB = BC$ kleiner als ein Quadrant, $AC = CD$, die Sehnen $AB = BC = s_{4n}$, mithin $AC = CD = s_{2n}$, $AD = s_n$. — Zieht man die Durchmesser $AE = BF = d = 2r$, so ist in dem Vierecke $ABCF$, da $AF = CF = BE$:

$$\text{I.}\quad d\,.\,AC = 2\,AB\,.\,BE;$$

und in dem Vierecke $BCEF$

$$d\,.\,CE = BE\,.\,CF - BC^2 = BE^2 - AB^2$$

$$\text{II.}\quad d\,.\,CE = d^2 \quad 2\,AB^2 = d^2 - 2\,s^2_{4n}.$$

$$\therefore\ d\,.\,AD = 2\,AC\,.\,CE\ \text{(I.)}$$

Das Produkt der beiden letzten Gleichungen ist

$$d^2\,.\,AD = 2\,AC\,(d^2 - 2\,AB^2),$$

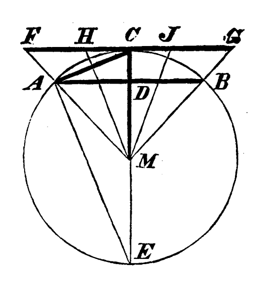
oder

$$\text{III.}\quad d^2\,.\,s_n = 2\,s_{2n}\,(d^2 - 2\,s^2_{4n}).$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit n, so ergiebt sich

$$d^2\,e_n = e_{2n}\,(d^2 - 2\,s^2_{4n});$$

$$\text{IV.}\quad \therefore\ 8\,n^2\,.\,d^2\,(e_{2n} - e_n) = e_{2n}\,e^2_{4n}.$$



7. In dem Kreise um M sei $AB = s_n$; der Winkel AMB werde durch den Halbmesser MC halbirt und dieser zum Durchmesser CE ergänzt, welcher AB in D schneidet. In C sei eine Tangente an den Kreis gelegt, welche MA und MB in F und G trifft. Die Halbirungslinien der Winkel AMC und CMB schneiden FG in H und J. Dann ist $AC = s_{2n}$, $t_n = FG$, $t_{2n} = HJ$. MD sei durch ϱ bezeichnet.

$$AD^2 = AM^2 - MD^2; \therefore s_n = 2\sqrt{r^2 - \varrho^2};$$

I. $$e_n = 2n\sqrt{r^2 - \varrho^2}.$$

$$FC : AD = r : \varrho; \therefore t_n = \frac{r \cdot s_n}{\varrho} = \frac{2r\sqrt{r^2 - \varrho^2}}{\varrho};$$

II. $$u_n = \frac{2nr}{\varrho}\sqrt{r^2 - \varrho^2}.$$

$$AC^2 = 2r \cdot CD = 2r(r - \varrho); \therefore s_{2n} = \sqrt{2r(r - \varrho)};$$

III. $$e_{2n} = 2n\sqrt{2r(r - \varrho)}.$$

$$MF : MC = MA : MD; \therefore MF \cdot \varrho = r^2;$$

$$MF : MC = FH : HC; \therefore (MF + MC) : MC = FC : HC;$$

$$\frac{r + \varrho}{\varrho} = \frac{t_n}{t_{2n}}; \; t_{2n} = \frac{\varrho\, t_n}{r + \varrho} = \frac{2r}{r + \varrho}\sqrt{r^2 - \varrho^2};$$

IV. $$u_{2n} = \frac{4nr}{r + \varrho}\sqrt{r^2 - \varrho^2} = 4nr\sqrt{\frac{r - \varrho}{r + \varrho}}.$$

V. $u_n : e_n = r : \varrho = MF : r$ (I. II.).

VI. $u_n : u_{2n} = (r + \varrho) : 2\varrho$ (II. IV.)

VII. $u_{2n} : e_n = 2r : (r + \varrho)$ (I. IV.).

Zusatz. Für $u = 3$ ist $\varrho = \frac{r}{2}$ (2.); $\therefore u_6 : e_3 = 4 : 3$.

8. Aus Nr. 7; I. III. IV. folgt

$$e^2_{2n} = e_n \cdot u_{2n}.$$

Der Umfang eines regulären Sehnen-2$n$ecks ist das geometrische Mittel zwischen den Umfängen des Sehnen-$n$ecks und des Tangenten-2$n$ecks.

Chr. Huyghens: De circuli magnitudine inv. (1654) prop. 13.

9. Addirt man 1 zu der Gleichung $u_n : e_n = r : \varrho$ (7; V.) und dividirt dann durch 2, so ergiebt sich:

$$\frac{u_n + e_n}{2\, e_n} = \frac{r + \varrho}{2\, \varrho} = \frac{u_n}{u_{2n}} \text{ (7; VI.)};$$

$$\therefore\ u_{2n} = \frac{2\, e_n\, u_n}{u_n + e_n};\ \frac{1}{u_{2n}} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{e_n} + \frac{1}{u_n}\right).$$

u_{2n} ist demnach das harmonische Mittel zwischen u_n und e_n.

Der Umfang eines umgeschriebenen regulären $2n$ecks ist das harmonische Mittel zwischen den Umfängen des umgeschriebenen und des eingeschriebenen $n$ecks.

J. Gregory: Exercitationes geometricae (Lond. 1668) prop. 5.

10. Bezeichnet a das arithmetische, g das geometrische, h das harmonische Mittel zwischen p und q, so ist

$$a = \frac{p + q}{2},\ g = \sqrt{pq},\ h = \frac{2\, pq}{p + q};$$

I. $$\therefore\ g^2 = ah.$$

Da $(p + q)^2 - (p - q)^2 = 4\, pq$ ist, so hat man $(p + q)^2 > 4\, pq$,

II. $$\therefore\ \frac{p + q}{2} > \sqrt{pq} \text{ oder } a > g;$$

III. $$\therefore\ h < g. \text{ (I.)}$$

Nun ist $$e^2_{2n} = e_n\, u_{2n} \text{ (8.)}$$

$$\therefore\ e_{2n} > \frac{2\, e_n\, u_{2n}}{e_n + u_{2n}} \text{ (III.)};$$

$$\therefore\ u_{2n} - e_{2n} < \frac{2\, e_n\, u_n}{e_n + u_n} - \frac{2\, e_n\, u_{2n}}{e_n + u_{2n}}. \text{ (9.)}$$

$$\frac{2\, e_n\, u_{2n}}{e_n + u_{2n}} = \frac{4\, e^2_n\, u_n}{e^2_n + e_n\, u_n + 2\, e_n\, u_n} = \frac{4\, e_n\, u_n}{e_n + 3\, u_n};$$

$$\therefore\ u_{2n} - e_{2n} < \frac{2\, e_n\, u^2_n - 2\, e^2_n\, u_n}{(e_n + u_n)\,(e_n + 3\, u_n)}$$

$$< \frac{2\, e_n\, u_n\, (u_n - e_n)}{(e_n + u_n)\,(e_n + 3\, u_n)}.$$

Weil aber $e_n + 3\, u_n > 2\,(e_n + u_n)$ und $(e_n + u_n)^2 > 4\, e_n\, u_n$ ist (II.),

$$\therefore\ u_{2n} - e_{2n} < \frac{e_n\, u_n}{(e_n + u_n)^2}\,(u_n - e_n);\ u_{2n} - e_{2n} < \tfrac{1}{4}\,(u_n - e_n).$$

Der Unterschied zwischen den Umfängen des um- und des eingeschriebenen regulären $2n$ecks ist kleiner als der vierte Theil des Unterschiedes zwischen den Umfängen des um- und des eingeschriebenen $n$ecks.

Crelle's Journ. XIV. (1835). Der Beweis nach Fr. Bartholomäi: Plan. (1851),* S. 235.

11. Aus der Gleichung $u_{2n} : e_{2n} = e_{2n} : e_n$ (8.) folgt:

$$\frac{u_{2n} - e_{2n}}{e_{2n} - e_n} = \frac{e_{2n}}{e_n}.$$

Nun ist $e_{2n} : e_n = \sqrt{2r} : \sqrt{r + \varrho}$ (7.); $\therefore e_{2n} > e_n$;

$$\therefore u_{2n} - e_{2n} > e_{2n} - e_n.$$

Der Unterschied zwischen den Umfängen des um- und eingeschriebenen $2n$ecks ist grösser als der Unterschied zwischen den Umfängen des eingeschriebenen $2n$ecks und $n$ecks.

12. Setzt man in Nr. 6. IV. überall $2n$ an die Stelle von n, so hat man $32\,n^2.d^2\,(e_{4n} - e_{2n}) = e_{4n}.e^2_{8n}$;

$$\therefore \frac{e_{4n} - e_{2n}}{e_{2n} - e_n} = \tfrac{1}{4}\,\frac{e^2_{8n}}{e_{2n}\,.\,e_{4n}}.$$ Da aber $e^2_{8n} > e_{2n}\,.\,e_{4n}$

$$\therefore e_{4n} - e_{2n} > \tfrac{1}{4}\,(e_{2n} - e_n).$$

Der Unterschied zwischen den Umfängen des eingeschriebenen regulären $4n$ecks und $2n$ecks ist grösser als der vierte Theil des Unterschieds zwischen den Umfängen des $2n$ecks und $n$ecks.

13. Da die Kreislinie k grösser ist als jedes ihr eingeschriebene Vieleck, so hat man folgende Gleichung:

I. $k = e_n + (e_{2n} - e_n) + (e_{4n} - e_{2n}) + (e_{8n} - e_{4n}) + \ldots$

Die rechte Seite derselben stellt eine unendliche Reihe dar, in welcher (10. 11.) $e_{2n} - e_n < u_{2n} - e_{2n} < \frac{1}{4}\,(u_n - e_n)$,

$e_{4n} - e_{2n} < u_{4n} - e_{4n} < \frac{1}{4}\,(u_{2n} - e_{2n}) < \frac{1}{4^2}\,(u_n - e_n)$ .. ist.

$$\therefore k < e_n + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots\right)(u_n - e_n);$$

II. $k < e_n + \frac{1}{3}\,(u_n - e_n)$, oder $k < \frac{2}{3}\,e_n + \frac{1}{3}\,u_n$.

Die Kreislinie ist kleiner als zweidrittel des Umfanges vom eingeschriebenen nebst eindrittel des Umfanges vom umgeschriebenen regelmässigen $n$ecke.

Da aber auch (12.) $e_{4n} - e_{2n} > \frac{1}{4}\,(e_{2n} - e_n)$,

$$e_{8n} - e_{4n} > \frac{1}{4}(e_{4n} - e_{2n}) > \frac{1}{4^2}(e_{2n} - e_n) \ldots \text{ ist,}$$

so ergiebt sich aus I.:

$$k > e_{2n} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4_2} + \frac{1}{4^3} + \ldots\right)(e_{2n} - e_n);$$

III. $$k > e_{2n} + \frac{1}{3}(e_{2n} - e_n).$$

Die Kreislinie ist grösser als der Umfang eines eingeschriebenen $2n$ecks nebst eindrittel des Ueberschusses vom Umfange dieses Vielecks über den des eingeschriebenen $n$ecks.

Beide Sätze (II. III.) leitet Huyghens (De circ. magn. prop. 7 u. 9) aus Inhaltsberechnungen ab.

14. Mittels der vorstehenden Sätze lässt sich nun das Verhältniss der Kreislinie k zum Durchmesser d, welches durch π bezeichnet wird, mit beliebiger Genauigkeit berechnen.

Die erste genauere Bestimmung der Zahl π verdanken wir Archimedes aus Syrakus (287 — 212 v. Chr.). Im dritten Satze seiner „Kreismessung" (κύκλου μέτρησις) zeigt er durch Berechnung der Umfänge des umgeschriebenen und eingeschriebenen 96 ecks, dass π grösser als $3\frac{10}{71}$ und kleiner als $3\frac{1}{7}$ sei.

Folgen wir Archimedes, so erhalten wir $e_3 = d \,.\, \frac{3}{2}\sqrt{3}$ (2.)

$e_6 = d \,.\, 3$ (1.) $\quad u_6 = d \,.\, 2\sqrt{3} = 3,4641\ 0162$ (8.)

$e_{12} = d \,.\, 3,1058\ 2854$; $\quad u_{12} = d \,.\, 3,2153\ 9031$

$e_{24} = d \,.\, 3,1326\ 2861$; $\quad u_{24} = d \,.\, 3,1596\ 5994$

$e_{48} = d \,.\, 3,1393\ 5020$; $\quad u_{48} = d \,.\, 3,1460\ 8622$

$e_{96} = d \,.\, 3,1410\ 3195$; $\quad u_{96} = d \,.\, 3,1427\ 1460$.

Nach Nr. 13 ist nun $k > e_{96} + \frac{1}{3}(e_{96} - e_{48})$ und $k < e_{96} + \frac{1}{3}(u_{96} - e_{96})$, oder

$$k > 3,1415\ 9253 \,.\, d \text{ und } k < 3,1415\ 9283 \,.\, d.$$

Hiermit stimmt in den 6 ersten Decimalstellen der angenäherte Werth für π, 355 : 113, überein, welchen Adriaan Anthoniszoon, Bürgermeister von Alkmaar (im 16. Jahrhundert n. Chr.) zuerst fand.

Ludolph van Ceulen (geboren in Hildesheim 1539, gestorben in Leyden 1610), berechnete zuerst (1586) die Zahl π bis auf 20, später bis auf 35 Decimalstellen.

Hiernach ist $\pi = 3,1415\ 9265\ 3589\ 7932\ 3846\ 2643\ 3832\ 7950\ 288$.

Die Länge des Kreises, $k = 2r\pi$, lässt sich demnach mit beliebiger Genauigkeit berechnen.

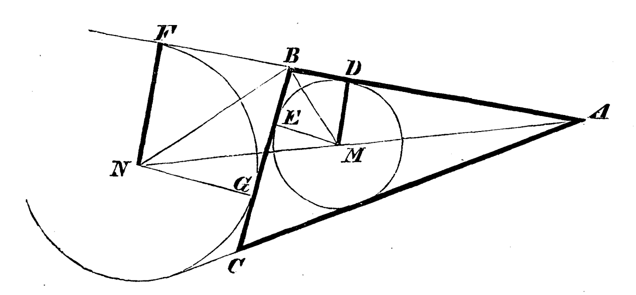
Zusatz. Bis auf 20 Decimalstellen ist $\frac{1}{\pi} = 0,3183\ 0988\ 6183\ 7906\ 7154$.

15. Der Kreisbogen, welcher dem Halbmesser gleich ist, liegt einem Centriwinkel von $\frac{180^0}{\pi} = 57,2957\,7951\,3082^0 = 57^0\, 17'44{,}806'' = 206264,806''$ gegenüber. Nimmt man diesen Winkel zur Winkeleinheit, so wird

$$360^0 = 2\pi;\ 180^0 = \pi;\ 90^0 = \frac{\pi}{2} \text{ etc.}$$

§ 47.

Der Zusammenhang zwischen Umfang und Flächeninhalt der Gebilde.



1. Es sei M der Mittelpunkt des Kreises, welcher die Seitenstrecken des Dreiecks ABC von innen berührt, und zwar AB in D, BC in E; N der Mittelpunkt des Kreises, welcher BC von aussen in G, die Verlängerung von AB in F und auch die Verlängerung von AC berührt; $MD = ME = \varrho$, $NF = NG = \varrho_1$, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $a + b + c = 2s$. — Nun ist (§ 29; 2)

$$AD = \frac{b + c - a}{2} = s - a,\ BD = \frac{a - b + c}{2} = s - b,$$

$$CE = \frac{a + b - c}{2} = s - c;$$

$$AF = \frac{a + b + c}{2} = s,\ BF = \frac{a + b - c}{2} = s - c,$$

$$CG = \frac{a + c - b}{2} = s - b.$$

Ferner ist

$$\overline{ABC} = \overline{ABM} + \overline{BCM} + \overline{CAM}.$$

Bezeichnet man den Inhalt des Dreiecks ABC durch $\overline{ABC_J}$, so ist

$$\text{I.} \qquad \overline{ABC_J} = \varrho \cdot \frac{a + b + c}{2} = \varrho s.$$

Auch ist $\overline{ABC} = \overline{ABN} + \overline{CAN} - \overline{CBN}.$

II. $\therefore \overline{ABC_J} = \varrho_1 \cdot \frac{b + c - a}{2} = \varrho_1 (s - a).$

Ebenso erhält man, wenn ϱ_2 und ϱ_3 die Radien der Berührungskreise des Dreiecks ABC sind, welche b und c von aussen berühren:

III. $\overline{ABC_J} = \varrho_2 (s - b);$

IV. $\overline{ABC_J} = \varrho_3 (s - c).$

Es ist aber $\triangle MBE \backsim BNG,$

$$ME : BE = BG : NG,$$

$$\therefore BE \cdot BG = (s - b)(s - c) = \varrho\varrho_1.$$

Das Produkt der Gleichungen III. und IV. beträgt

$$\overline{ABC_J}^2 = \varrho_2 \cdot \varrho_3 (s - b)(s - c);$$

V. $\therefore \overline{ABC_J}^2 = \varrho \cdot \varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot \varrho_3.$

Setzt man aber in das Produkt der Gleichungen I. und II. den Werth von $\varrho \cdot \varrho_1$ ein, so ergiebt sich:

$$\overline{ABC_J}^2 = s \cdot (s - a)(s - b)(s - c).$$

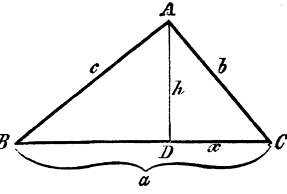
VI. $\overline{ABC_J} = \sqrt{s (s - a)(s - b)(s - c)}.$

Den durch die Endgleichung ausgedrückten Satz fand zuerst, so viel wir wissen, Heron (der ältere) von Alexandrien, welcher im zweiten Jahrh. vor Chr. lebte. Der Beweis, den er davon in seiner Schrift Περὶ διόπτρας (ins Italienische übersetzt von Venturi: Memorie dell' Instituto nationale T. I. P. II. Bologna 1813 p. 231—301) giebt, stimmt im Wesentlichen mit dem Vorstehenden überein.

Vgl. Pfleiderer: Ebene Trigon. (1802) § 48. 50. 164.

J. Newton bewies (Arithmetica univers. Lugd. Bat. 1732. p. 105 Prbl. XI) die obige Inhaltsformel auf eine andere Art, die sich mit der angegebenen Bezeichnung so darstellen lässt.

In dem Dreiecke ABC sei aus A auf BC die Senkrechte $AD = h$ gefällt, welche von BC die Strecke $DC = x$ abschneidet. Dann ist § 43; 4)



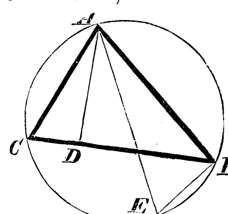
$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a};$$

$$h^2 = b^2 - x^2 = \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2}$$

$$h = \frac{1}{2a} \sqrt{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2};$$

$$\overline{ABC}_J = \frac{h\,a}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{[(a+b)^2 - c^2]\,[c^2 - (a-b)^2]}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$
$$= \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}.$$

Beisp. Für $a = 13^m$, $b = 14^m$, $c = 15^m$ und für a $= 10^m$, $b = 17^m$, $c = 21^m$ ist $\overline{ABC}_J = 84^{\square m}$.



2. In dem Dreiecke ABC, welches einem Kreise mit dem Radius r eingeschrieben ist, sei aus A auf BC die Senkrechte AD gefällt, der Durchmesser AE und die Sehne BE gezogen. — Nun ist

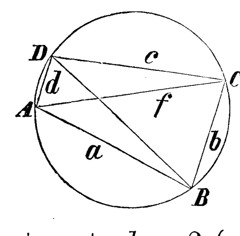
$$\triangle\ AEB \backsim ACD;$$
$$\therefore\ AE : AB = AC : AD;\ AE\,.\,AD = AB\,.\,AC$$
$$\therefore\ AE\,.\,AD\,.\,BC = AB\,.\,AC\,.\,BC,$$

d. i., wenn man $\overline{ABC}_J = J$ setzt und im Uebrigen die vorherige Bezeichnung anwendet:

$$4r\,.\,J = a\,.\,b\,.\,c.$$

Das Längenprodukt aus den drei Seitenstrecken eines Dreiecks ist viermal so gross als das Produkt aus seinem Flächeninhalte und der Radiuslänge des umgeschriebenen Kreises.

Joh. Müller, genannt Regiomontan: De triangulis omnimodis II. 24.



3. In dem einem Kreise eingeschriebenen einfachen Vierecke $ABCD$ sei $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = f$, $a + b + c + d = 2s$, mithin $a + b + c - d = 2(s - d)$, $a + b - c + d = 2(s - c)$, $a - b + c + d = 2(s - b)$ und $-a + b + c + d = 2(s - a)$. Nun ist (1.)

$$\overline{ABC}_J = \frac{(2\,ab)^2 - (a^2 + b^2 - f^2)^2}{16},$$
$$\overline{CDA}_J = \frac{(2\,cd)^2 - (c^2 + d^2 - f^2)^2}{16}.$$

Nach § 43; 15 hat man aber

$$f^2 = \frac{(ac + bd)\,(ad + bc)}{ab + cd} = \frac{ab\,(c^2 + d^2) + cd\,(a^2 + b^2)}{ab + cd};$$

$$\therefore\ a^2 + b^2 - f^2 = \frac{ab\ (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)}{ab + cd},$$

$$c^2 + d^2 - f^2 = \frac{cd\ (c^2 + d^2 - a^2 - b^2)}{ab + cd}.$$

$$(2\,ab)^2 - (a^2 + b^2 - f^2)^2 = \frac{a^2b^2[4(ab+cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2]}{(ab + cd)^2},$$

$$= \frac{a^2b^2}{(ab + cd)^2} \cdot [(a + b)^2 - (c - d)^2]\ [(c + d)^2 - (a - b)^2]$$

$$= \frac{16\,a^2b^2}{(ab + cd)^2}\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)\,(s - d).$$

Auf gleiche Art erhält man

$$(2\,cd)^2 - (c^2 + d^2 - f^2)^2 = \frac{16\,c^2d^2}{ab + cd}(s - a)\,(s - b)\,(s - c)\,(s - d).$$

$$\overline{ABC}_J = \frac{ab}{ab + cd}\ \sqrt{(s - a)\,(s - b)\,(s - c)\,(s - d)},$$

$$\overline{CDA}_J = \frac{cd}{ab + cd}\ \sqrt{(s - a)\,(s - b)\,(s - c)\,(s - d)};$$

$$\overline{ABCD}_J = \sqrt{(s - a)\,(s - b)\ s - c)\,(s - d)}.$$

Dieser Satz wird zuerst in einem astronomischen Werke des Inders Brahmegupta (im 6. Jahrh. nach Chr.) angeführt: Algebra with Arithmetic and Mensuration etc., translated by H. T. Colebrooke (London 1817). — Später fand ihn W. Snellius aufs neue: Fundamenta arithm. et geom. etc. (Lugd. Bat. 1615) p. 189.

Beisp. Für die Längen der Seitenstrecken in Metern: 11, 9, 7, 3 ergiebt sich $\overline{ABCD}_J = 48$ Quadratmeter.

4. Ist r der Radius des dem Vierecke $abcd$ umgeschriebenen Kreises, so erhält man nach der Bezeichnung unter Nr. 3 (2.):

$$4\,.\,\overline{ABC}_J\,.\,r = a\,.\,b\,.\,f$$

$$4\,.\,\overline{CDA}_J\,.\,r = c\,.\,d\,.\,f$$

$$\therefore\ 4\,.\,\overline{ABCD}_J\,.\,r = f\,(a\,.\,b + c\,.\,d).$$

Setzt man den Werth von f ein, so ergiebt sich

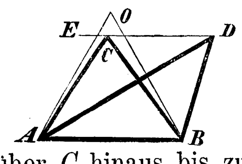
I. $4\,.\,\overline{ABCD}_J\,.\,r = \sqrt{(ab + cd)\,(ac + bd)\,(ad + bc)}.$

Führt man hingegen die beiden andern Diagonalen g und h der Vierecke, welche die Seitenstrecken a, b, c, d haben, ein, so erhält man, weil (§ 43; 15) $gh = a\,.\,b + c\,.\,d$ ist,

II. $4\,.\,\overline{ABCD}_J\,.\,r = f\,.\,g\,.\,h.$

A. Girard giebt in seinen Tables des sinus etc. (1626) diesen Satz ohne Beweis.

L. Kunze (Geom. S. 230) hat folgendes Beispiel: Für $a = 300$, $b = 195$, $c = 91$, $d = 80$, wird $f = 165$, $g = 260$, $h = 253$, $2r = 325$, $\overline{ABCD}_J = 16698$.



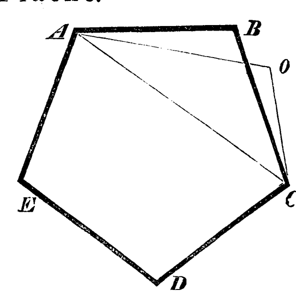
5. Die Dreiecke ABC und ABD haben die Grundlinie AB gemein und auch gleiche Höhen, so dass sie gleichflächig sind. Ausserdem ist $BC = AC$. — Verlängert man DC über C hinaus bis zu dem beliebigen Punkte E, so ist $\sphericalangle ACE = BCD$,

$$\therefore AC + BC < AD + BD \text{ (§ 19; 10)};$$
$$AB + BC + CA < AB + BD + DA.$$

Beschreibt man über der Grundlinie AB ein zweites gleichschenkliges Dreieck, dessen Schenkel $AO = BO = \frac{1}{2}(AD + BD)$ sind, so liegt C innerhalb ABO (§ 19; 4),

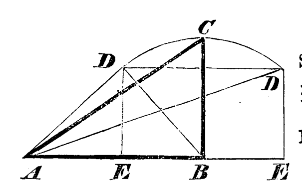
$$\therefore \overline{ABO} > \overline{ABC}.$$

Von allen Dreiecken mit derselben Grundlinie hat das gleichschenklige bei gleicher Fläche den kleinsten Umfang, bei gleichem Umfange die grösste Fläche.



6. Unter allen einfachen n ecken von gleichem Umfange habe $ABCDE$ den grössten Flächenraum. — Schneidet man durch die Diagonale AC ein Dreieck ABC ab und errichtet über der Grundlinie AC ein zweites Dreieck AOC so, dass $AO + OC = AB + BC$ ist, so ist nur dann $\overline{ABC} > \overline{AOC}$ und $\overline{ABCDE} > \overline{AOCDE}$, wenn $AB = BC$ wäre (5.). Daraus folgt:

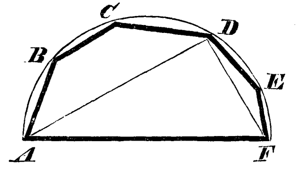
Unter allen $n$ecken mit gleicher Eckenzahl und gleichem Umfange hat dasjenige, welches die grösste Fläche umschliesst, gleiche Seitenstrecken.



7. In den Dreiecken ABC und ABD sei $BC = BD$, $\sphericalangle ABC = 90^0$, $\sphericalangle ABD \gtrless 90^0$. — Fällt man aus D die Senkrechte DE auf AB, so ist $DE < BD$

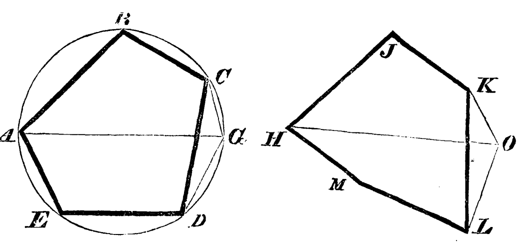
$$\therefore \overline{ABC} > \overline{ABD} \text{ (§ 38; 6. Zus.)}$$

Unter allen Dreiecken, welche in zwei Seitenstrecken übereinstimmen, hat dasjenige die grösste Fläche, in welchem die beiden Seitenstrecken einen rechten Winkel einschliessen.



8. Von einem n ecke $ABCDEF$, dessen Fläche grösser ist als die irgend eines andern n ecks mit denselben Seitenstrecken in gleicher Folge, seien $n - 1$ dieser Seitenstrecken (nebst den Verbindungslinien) gegeben, die letzte AF noch zu bestimmen. — Die Aufgabe wird gelöst, wenn man AF so bestimmt, dass die (gegebenen) Verbindungslinien der Punkte A und F mit jeder andern Ecke die grösste Dreiecksfläche einschliessen, d. h. wenn sie rechte Winkel bilden (7.), so dass $\sphericalangle\, ABF = ACF = ADF = AEF = 90^0$ ist. Denn, wäre einer dieser Winkel kleiner als ein rechter, so würde durch die gegebenen $n - 1$ Seitenstrecken nicht die grösste Fläche bestimmt, welche möglich ist, was der Voraussetzung widerspricht. Die Punkte B, C, D, E liegen demnach auf einem Halbkreise, welcher über dem Durchmesser AF beschrieben ist (§ 25; 10. Zus.).

Das n eck, von welchem $n - 1$ Seitenstrecken mit einer durch sie zu bestimmenden die grösste Fläche einschliessen, ist einem Halbkreise eingeschrieben, dessen Durchmesser die unbestimmte Seitenstrecke bildet.



9. Einem Kreise sei das n eck $ABCDE$ eingeschrieben, und ausserdem sei ein n eck $HJKLM$ gegeben, dessen Ecken nicht auf einem Kreise liegen, und dessen Seitenstrecken in Grösse und Folge mit dem ersteren übereinstimmen, so dass $AB = HJ, BC = JK, CD = KL, DE = LM, EA = MH$ ist.

Zieht man den Durchmesser AG, die Sehnen CG, DG, fügt zu $HJKLM$ das Dreieck $KLO \cong CDG$ hinzu und zieht HO, so ist (8.)

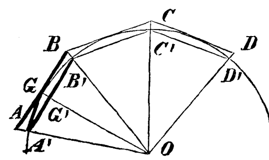
$$\overline{ABCG} > \overline{HJKO},$$
$$\overline{AGDE} > \overline{HOLM},$$
$$\overline{CGD} = \overline{KOL},$$
$$\therefore \overline{ABCDE} > \overline{HJKLM}.$$

Die Fläche eines einem Kreise eingeschriebenen einfachen $n$ecks ist grösser als die irgend eines andern $n$ecks, dessen Seitenstrecken mit jenem in Anzahl und Grösse übereinstimmen.

Zus. 1. Die Flächengrösse aller einem Kreise eingeschriebenen $n$ecke ist dieselbe, wenn sie sich nur durch die Folge der Seitenstrecken unterscheiden. Denn die Fläche eines jeden dieser $n$ecke besteht aus n Dreiecksflächen, von denen jede eine Seitenstrecke des $n$ecks zur Grundlinie und den (bei jeder Lage der Sehne unveränderlichen) Abstand derselben vom Mittelpunkte des Kreises zur Höhe hat.

Zus. 2. Unter allen $n$ecken von gleichem Umfange und gleicher Eckenzahl hat dasjenige einfache $n$eck die grösste Fläche, dessen Winkel und Seitenstrecken einander gleich sind (6.).

Die unter Nr. 5—9 enthaltenen Sätze entwickelte, im Wesentlichen auf gleiche Weise, Thomas Simpson: Elements of Geometry etc. (1760) Maxima and Minima, the Thorems 4. 5. 10. 11. 12. 13.



10. Es sei O der Mittelpunkt, r der Radius eines Kreises, welchem das $n$eck $ABCD$ . . mit dem Umfange u_n und dem Flächeninhalte $\overline{u_n}$ umgeschrieben ist. — Zieht man aus O nach den Ecken des $n$ecks Gerade, OA, OB . ., so zerfällt das Gebilde in die n Dreiecke OAB, OBC, OCD . .

Betrachtet man in einem derselben, OAB, OB als Grundlinie und fällt auf dieselbe die Senkrechte OG, so ist diese gleich r und auch die Höhe des Dreiecks ABC. Nun ist

$$\overline{OAB_J} = \frac{r}{2} \cdot AB,\ \overline{OBC_J} = \frac{r}{2} \cdot BC\ . .$$

$$\overline{u_n} = \frac{r}{2}\,(AB + BC + CD + . .);\ u_n = AB + BC + CD + . .$$

$$\therefore\ \overline{u_n} = \frac{r\ .\ u_n}{2}.$$

Der Flächeninhalt eines einem Kreise umgeschriebenen und ihn einschliessenden einfachen $n$ecks ist dem halben Längenprodukte aus seinem Umfange und dem Radius des Kreises gleich.

A. Tacquet: Theoremata selecta ex Archimede (1665). Prop. 4.

11. Bezeichnet man die Umfänge des eingeschriebenen regelmässigen $n$ecks und $2n$ecks durch e_n und e_{2n}, die zugehörigen Flächen dieser Gebilde durch $\overline{e}_n$ und $\overline{e}_{2n}$, den Radius des dem $n$ecke eingeschriebenen Kreises durch ϱ; ist eine Seitenstrecke $A'B' = \frac{e_n}{n}$, $A'G' = \frac{e_n}{2n}$, $A'G = \frac{e_{2n}}{2n}$ die Seitenstrecke des eingeschriebenen $2n$ecks, $OG' = \varrho$, so ergiebt sich:

$$\overline{e}_n = 2n \,.\, \overline{OA'G'};\ \overline{e}_{2n} = 2n \,.\, \overline{OA'G};$$
$$\therefore\ \overline{e}_n : \overline{e}_{2n} = \overline{OA'G'} : \overline{OA'G},$$

I. $$\overline{e}_n : \overline{e}_{2n} = \varrho : r.$$

Da nun $\overline{e}_n = \frac{\varrho}{2} \,.\, e_n$ (10.), so ist

II. $$\overline{e}_{2n} = \frac{r}{2} \,.\, e_n.$$

D e r F l ä c h e n i n h a l t d e s e i n e m K r e i s e e i n g e s c h r i e b e n e n r e g e l m ä s s i g e n 2*n* e c k s i s t d e m h a l b e n L ä n g e n p r o d u k t e a u s d e m U m f a n g e d e s e i n g e s c h r i e b e n e n *n* e c k s u n d d e m R a d i u s g l e i c h.

Chr. Huyghens: De circ. magn. inv., im Beweise der pr. 7.

Zusatz. In dem eingeschriebenen regulären Dreiecke ist $\varrho = \frac{r}{2}$ (§ 46; 2). Die Fläche dieses Dreiecks ist also halb so gross wie die des eingeschriebenen regulären Sechsecks.

12. Aus Nr. 10 und § 46; 7 leitet man folgende Gleichungen her:

I. $$\overline{e}_n = \frac{\varrho}{2} \,.\, e_n = n\varrho\,\sqrt{r^2 - \varrho^2};$$

II. $$\overline{u}_n = \frac{r}{2}\, u_n = \frac{nr^2}{\varrho}\,\sqrt{r^2 - \varrho^2};$$

III. $$\overline{u}_{2n} = \frac{r}{2}\, u_{2n} = \frac{2n\, r^2}{r + \varrho}\,\sqrt{r^2 - \varrho^2} = 2nr^2\sqrt{\frac{r - \varrho}{r + \varrho}}.$$

Nun ist (11. II.) $\overline{e}_{2n} = \frac{r}{2} \,.\, e_n$, mithin

IV. $$\overline{e}_{2n} = nr\,\sqrt{r^2 - \varrho^2}.$$

Multiplicirt man die Gleichungen I. und II., so ergiebt sich als Produkt

V. $$\overline{e}_{2n}^{\,2} = \overline{e}_n \,.\, \overline{u}_n.$$

Die Fläche des einem Kreise eingeschriebenen regelmässigen $2n$ecks ist das geometrische Mittel zwischen den Flächen des eingeschriebenen und des umgeschriebenen $n$ecks.

W. Snellius: Cyclometricus (Lugd. Bat. 1621) prop. 9.

Das Produkt der Gleichungen II. und IV. ist:

$$\bar{e}_{2n} \cdot \bar{u}_n = \frac{n^2 r^3}{\varrho} (r^2 - \varrho^2),$$

ihre Summe:

$$\bar{e}_{2n} + \bar{u}_n = \frac{n r (r + \varrho)}{\varrho} \sqrt{r^2 - \varrho^2},$$

das Produkt dieser Summe und der Gleichung III.:

$$(\bar{e}_{2n} + \bar{u}_n)\, \bar{u}_{2n} = \frac{2 n^2 r^3}{\varrho} (r^2 - \varrho^2);$$

$$\text{VI. } \therefore \bar{u}_{2n} = \frac{2\, \bar{e}_{2n} \cdot \bar{u}_n}{\bar{e}_{2n} + \bar{u}_n}; \quad \frac{1}{\bar{u}_{2n}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\bar{e}_{2n}} + \frac{1}{\bar{u}_n} \right).$$

Die Fläche des umgeschriebenen regelmässigen $2n$ecks ist das harmonische Mittel zwischen den Flächen des eingeschriebenen $2n$ecks und des umgeschriebenen $n$ecks.

J. Gregory: Vera circuli et hyperb. quadratura (1667) pr. 12. Diese Abhandlung ist abgedruckt in: Hugenii opera varia p. 407 etc.

13. Aus dem Vorstehenden lassen sich leicht folgende Sätze ableiten, in denen die Kreisfläche durch $\bar{k}$ bezeichnet ist:

I. $\bar{u}_{2n} - \bar{e}_{2n} < \frac{1}{4} (\bar{u}_n - \bar{e}_n)$. — Crelle's J. 14 (1835).

II. $\bar{u}_{2n} - \bar{e}_{2n} > \frac{1}{2} (\bar{e}_{2n} - \bar{e}_n)$. — L. Kunze: Geom. (1842) § 181.

III. $\bar{e}_{4n} - \bar{e}_{2n} > \frac{1}{4} (\bar{e}_{2n} - \bar{e}_n)$;
IV. $\bar{k} < \bar{u}_n - \frac{1}{3} (\bar{u}_n - \bar{e}_n)$;
V. $\bar{k} > \bar{e}_{2n} + \frac{1}{3} (\bar{e}_{2n} - \bar{e}_n)$.
} Chr. Huyghens: De circ. magn. inventa (1654) prop. 1. 5. 6.

14. Es sei k der Umfang, r der Radius und $\bar{k}$ der Flächeninhalt eines Kreises, u der Umfang und $\bar{u}_n$ der Flächeninhalt eines dem Kreise umgeschriebenen regulären $n$ecks. — Da die Gleichung

$$\bar{u}_n = \frac{r}{2}\, u_n \quad (10.)$$

für jeden Werth von n gilt, also von der Grösse dieser Zahl unabhängig ist, so bleibt sie auch gültig, wenn $n = \infty$ ist, also u_n in k übergeht, so dass

$$\bar{k} = \frac{r \cdot k}{2}.$$

Die Kreisfläche ist der Fläche eines Dreiecks gleich, welches den Kreisumfang zur Grundlinie und den Radius zur Höhe hat.

Archimedes: Kreismessung, prop. 1.

Zus. 1. Setzt man in die letzte Gleichung ein

$$k = 2\, r\, \pi \text{ (§ 46; 14)},$$

so ergiebt sich

$$\overline{k} = r^2 \pi.$$

Der Flächeninhalt eines Kreises ist dem Produkte aus dem Längenquadrate des Radius und der Zahl π gleich.

Zus. 2. Werden die Radien zweier Kreise durch r und r', ihre Umfänge durch k und k', die Flächen durch $\overline{k}$ und $\overline{k}'$ bezeichnet, so ist

$$r : r' = k : k' \text{ (§ 46; 14)};$$
$$\overline{k} : \overline{k}' = r^2 : r'^2;$$
$$\overline{k} : \overline{k}' = rk : r'k' = k^2 : k'^2.$$

Die Flächen zweier Kreise verhalten sich wie die Längenquadrate ihrer Radien oder Umfänge.

Eukl. XII; 2.

15. Ein Theil der Kreisfläche, welcher von einem Bogen und den nach seinen Endpunkten gehenden Radien begrenzt wird, heisst ein Kreisausschnitt oder Sector.

Ein Theil der Kreisfläche, welcher von einem Bogen und der seine Endpunkte verbindenden Sehne eingeschlossen wird, soll ein Kreisabschnitt oder Segment genannt werden.

Eukl. III. Erkl. 6. 10.

Bezeichnet b den Bogen, welcher zum Kreisausschnitte $\overline{sc}$ gehört, so ist $b : 2r\pi = \overline{sc} : r^2\pi$.

I. $$\therefore\ \overline{sc} = \frac{b\, .\, r}{2}.$$

Ein Kreisausschnitt ist der Fläche eines Dreiecks gleich, welches den Bogen des Sectors zur Grundlinie und den Halbmesser zur Höhe hat.

Ist der zum Kreisausschnitte gehörige Centriwinkel w gegeben und in Graden ausgedrückt, so ist

$$\overline{sc} : r^2\pi = w^0 : 360^0.$$

II. $$\therefore\ \overline{sc} = \frac{w^0}{360^0}\, .\, r^2\pi.$$

Wenn aber w in Theilen des Halbmessers ausgedrückt ist, so erhält man aus der Gleichung

$$\overline{sc} : r^2\pi = w : 2\pi,$$

III. $$\overline{sc} = \frac{w}{2} \cdot r^2.$$

Siebentes Hauptstück:

Die Collineation.

§ 48.

Einleitung.

1. Zwei Gebilde heissen collinear (⩘), wenn sie auf einem Strahlbüschel perspectivisch so liegen können, dass die entsprechenden Geraden auf einer Geraden, der Collineationsaxe, zusammentreffen.

Der Projectionspunkt wird innerer oder äusserer Collineationspunkt genannt, je nachdem er auf der Strecke zwischen zwei entsprechenden Punkten oder auf ihrer Verlängerung liegt.

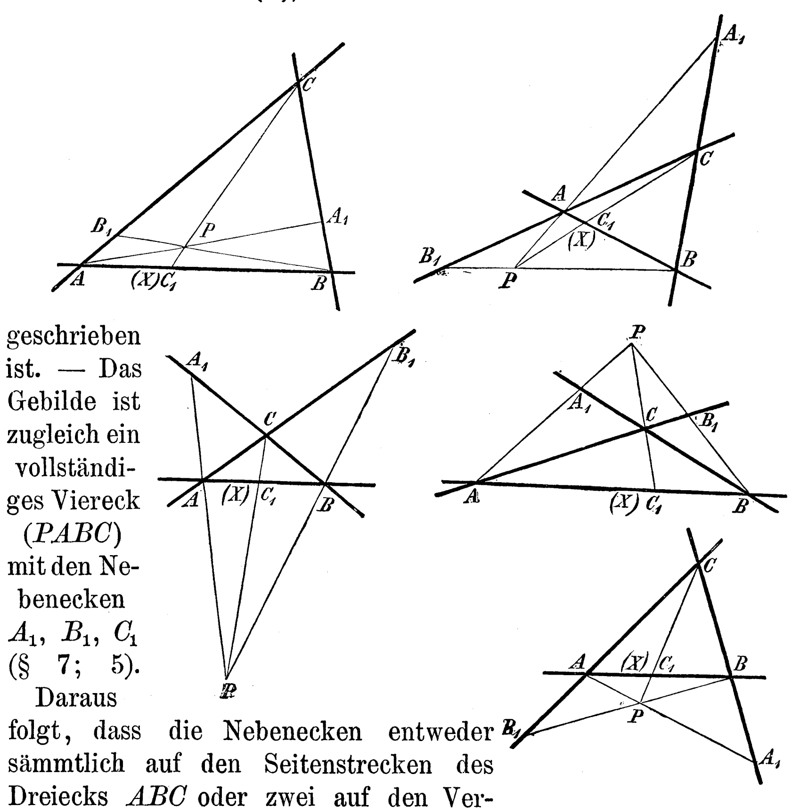
Zus. 1. Zwei Punktreihen sind collinear, wenn sie perspectivisch auf einem Strahlbüschel liegen können.

Zus. 2. Zwei Strahlbüschel sind collinear, wenn jedem Strahle des einen ein Strahl des andern entspricht, und sie so liegen können, dass die entsprechenden Strahlen auf einer Geraden zusammentreffen.

Anmerk. Nach A. F. Möbius, der die Lehre von der Collineation begründete (Barycentr. Calcul § 217—247), „besteht das Wesen derselben darin, dass bei zwei ebenen oder körperlichen Räumen jedem Punkte des einen Raumes ein Punkt in dem andern dergestalt entspricht, dass, wenn man in dem einen Raume eine beliebige Gerade zieht, von allen Punkten, welche von dieser Geraden getroffen werden (collineantur), die entsprechenden Punkte in dem andern Raume gleichfalls durch eine Gerade verbunden werden können. Es ist deshalb diese Verwandtschaft die Verwandtschaft der Collineation genannt worden". Er bemerkt ausserdem beiläufig (B. C. § 230. Anmerk.), dass von zwei collinearen Systemen „das eine als eine perspectivische Abbildung des andern" betrachtet werden könne. — Das Zeichen ⩘ hat v. Staudt in seiner „Geometrie der Lage" § 9; 103 (1847) angegeben.

2. Bevor wir in die Entwickelung der Collineation selbst eintreten, haben wir die Bedingungen festzustellen, unter denen ein beliebiges Dreieck auf einem Strahlbüschel liegen kann.

Die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ liegen perspectivisch so auf einem Strahlbüschel (P), dass letzteres Dreieck dem ersteren eingeschrieben ist. — Das Gebilde ist zugleich ein vollständiges Viereck $(PABC)$ mit den Nebenecken A_1, B_1, C_1 (§ 7; 5). Daraus folgt, dass die Nebenecken entweder sämmtlich auf den Seitenstrecken des Dreiecks ABC oder zwei auf den Verlängerungen derselben liegen, je nachdem P sich innerhalb oder ausserhalb dieses Dreiecks befindet (§ 11; 1).



Für die Dreiecke ACC_1 und C_1CB, welche von den Querlinien PB und PA geschnitten werden, erhält man (35; 1.)

$$(AB_1 \, . \, CP \, . \, C_1B) = -1,$$
$$(C_1P \, . \, CA_1 \, . \, BA) = -1.$$

Das Produkt dieser Gleichungen

$$(AB_1 \, . \, CA_1 \, . \, BC_1) = 1,$$

drückt folgende Sätze aus:

I. Liegt ein Dreieck auf einem Strahlbüschel,

so werden seine Seitenlinien von den Strahlen nach einem Dreieckschnittsverhältnisse getheilt, dessen Werth gleich eins ist.

II. Wenn von zwei perspectivischen Dreiecken das eine dem andern eingeschrieben ist, so werden die Seitenlinien des umgeschriebenen Dreiecks von den Ecken des eingeschriebenen nach einem Dreieckschnittsverhältnisse getheilt, dessen Werth gleich eins ist.

Giovanni Ceva: De lineis rectis, se invicem secantibus, statica constructio etc. (Mediol. 1678) p. 15.

Zusatz. Wenn $BC_1 = C_1A$ ist, so wird

$$AB_1 : B_1C = BA_1 : A_1C;$$

$$\therefore A_1B_1 \parallel AB \text{ (§ 32; 4. Zus. 1.)}$$

Ist umgekehrt $A_1B_1 \parallel AB$, so hat man zunächst (§ 32; 3. Zus.)

$$AB_1 : B_1C = BA_1 : A_1C;$$

$$\therefore BC_1 = C_1A.$$

Wenn von zwei perspectivischen Dreiecken das eine dem andern eingeschrieben ist, und es wird eine Seitenstrecke des umgeschriebenen Dreiecks durch die zugehörige Ecke des andern halbirt, so ist die dieser Seitenstrecke entsprechende ihr parallel; umgekehrt, wenn zwei entsprechende Seitenstrecken parallel sind, so wird von ihnen die des umgeschriebenen Dreiecks durch die zugehörige Ecke halbirt.

Pappos VII; 132.

3. (Umkehrung von Nr. 2.) Liegen die Ecken eines Dreiecks $A_1B_1C_1$ auf den Seitenlinien BC, CA, AB eines andern so, dass sie dieselben nach einem Dreieckschnittsverhältnisse von dem Werthe gleich eins theilen, so befinden sich die beiden Dreiecke auf einem Strahlbüschel in perspectivischer Lage.

Denn, wenn AA_1 und BB_1 einander in P schneiden, und CP trifft AB in X, so ist (2)

$$(AX \,.\, BA_1 \,.\, CB_1) = 1,$$

und nach Voraussetzung

$$(AC_1 \,.\, BA_1 \,.\, CB_1) = 1;$$

$$\therefore AX : XB = AC_1 : C_1B;$$

$$\therefore XB = C_1B.$$

X fällt also mit C_1 zusammen, w. z. b. w.

Zusatz. Zwei Dreiecke liegen perspectivisch auf einem Strahlbüschel, wenn die Ecken des einen die Berührungspunkte des dem andern eingeschriebenen Kreises sind (§ 29; 2).

4. Von zwei perspectivischen Dreiecken mit dem Projectionspunkte P ist das eine $A_1B_1C_1$ dem andern ABC eingeschrieben. — Nun ist (§ 38; 1):

$$PA_1 : AA_1 = \overline{PBC} : \overline{ABC},$$
$$PB_1 : BB_1 = \overline{PCA} : \overline{ABC},$$
$$PC_1 : CC_1 = \overline{PAB} : \overline{ABC}.$$

Die Summe dieser drei Gleichungen ist:

I. $$\frac{PA_1}{AA_1} + \frac{PB_1}{BB_1} + \frac{PC_1}{CC_1} = 1.$$

Subtrahirt man diese Gleichung von der Zahl 3, so ergiebt sich

$$\left(1 - \frac{PA_1}{AA_1}\right) + \left(1 - \frac{PB_1}{BB_1}\right) + \left(1 + \frac{PC_1}{CC_1}\right) = 2,$$

oder, II. $$\frac{AP}{AA_1} + \frac{BP}{BB_1} + \frac{CP}{CC_1} = 2.$$

Aus der Gleichung I. leitet man ab

$$\frac{PA_1}{AP + PA_1} + \frac{PB_1}{BP + PB_1} + \frac{PC_1}{CP + PC_1} = 1;$$

$$\therefore \frac{1}{\frac{AP}{PA_1} + 1} + \frac{1}{\frac{BP}{PB_1} + 1} + \frac{1}{\frac{CP}{PC_1} + 1} = 1;$$

$$\left(\frac{AP}{PA_1} + 1\right)\left(\frac{BP}{PB_1} + 1\right) + \left(\frac{AP}{PA_1} + 1\right)\left(\frac{CP}{PC_1} + 1\right)$$
$$+ \left(\frac{BP}{PB_1} + 1\right)\left(\frac{CP}{PC_1} + 1\right) = \left(\frac{AP}{PA_1} + 1\right)\left(\frac{BP}{PB_1} + 1\right)$$
$$\left(\frac{CP}{PC_1} + 1\right);$$

III. $$\frac{AP}{PA_1} + \frac{BP}{PB_1} + \frac{CP}{PC_1} + 2 = \frac{AP}{PA_1} \cdot \frac{BP}{PB_1} \cdot \frac{CP}{PC_1}.$$

Diese drei Sätze hat L. Euler aufgefunden (Mém. de l'Acad. de St. Peterb. V; 96—114), L. Kunze (Geom. 5. Anh. III.) auf die angegebene Art bewiesen.

§ 49.

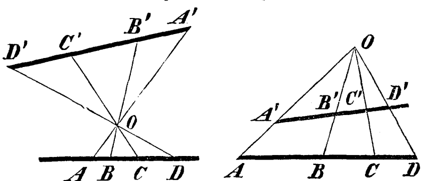
Die Collineation der Punktreihen.

1. Wenn die Punkte A, B, C einer Geraden den Punkten A', B', C' einer zweiten collinear Geraden entsprechen sollen, so

lege man A auf A'. Alsdann liegen beide Punktreihen perspectivisch auf einem Strahlbüschel, dessen Projectionspunkt der Durchschnitt von BB' und CC' ist.

Zwei Punktreihen von je drei Punkten sind stets collinear (§ 48; 1. Zus. 1.).

Möbius: Baryc. Calc. § 226.



2. Zwei beliebige Gerade werden von vier Strahlen eines Strahlbüschels (0) in den entsprechenden Punktreihen $ABCD$ und $A'B'C'D'$ geschnitten. — Da nun das Viereck $ACC'A'$ von den Querlinien BB' und DD' geschnitten wird, so ist (§ 35; 3.):

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CO}{OC'} \cdot \frac{C'B'}{B'A'} \cdot \frac{A'O}{OA} = 1,$$

$$\frac{AO}{OA'} \cdot \frac{A'D'}{D'C'} \cdot \frac{C'O}{OC} \cdot \frac{CD}{DA} = 1.$$

Das Produkt dieser Gleichungen ist

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DA} \cdot \frac{A'D'}{D'C'} \cdot \frac{C'B'}{B'A'} = 1;$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DA} = \frac{A'B'}{B'C'} \cdot \frac{C'D'}{D'A'}.$$

Nennt man nun einen Quotienten aus den Längenprodukten von je 2 unter vier zwischen 4 Punkten liegenden Strecken, in welchem die Strecken jedes Produktes keinen Endpunkt gemein haben, ein Doppelverhältniss, und bezeichnet man ein solches, ähnlich wie das Vieleckschnittsverhältniss, durch den in Klammern eingeschlossenen Zähler: so erhält die letzte Gleichung die Form

$$(AB \,.\, CD) = (A'B' \,.\, C'D').$$

Auf gleichem Wege erhält man mittels der Vierecke $ABB'A'$, $ADD'A'$

$$(AC \,.\, BD) = (A'C' \,.\, B'D'),$$
$$(AB \,.\, DC) = (A'B' \,.\, D'C').$$

Von vier Strahlen eines Strahlbüschels werden alle Geraden unter gleichen Doppelverhältnissen geschnitten.

Pappos VII; 129. — Möbius: Barycentr. Calcul § 189.

Zus. 1. Vier beliebige Punkte A, B, C, D können auf dreifache Art durch Strecken zu einer in sich zurücklaufenden Linie (Punktreihe zu 4, oder Viereck) verbunden werden, in den Folgen: $ABCD$, $ACDB$, $ADBC$ (§ 11; 1).

Unter den vier Strecken einer Folge lassen sich nur zweimal 2 Strecken ohne gemeinsamen Endpunkt zusammenfassen; sie gestatten daher auch nur die Bildung zweier Doppelverhältnisse, von denen das eine den reciproken Werth des andern darstellt, wie z. B. $(AB \,.\, CD) = \frac{1}{(AD \,.\, CB)}$. Diese beiden Doppelverhältnisse können indess in acht Formen auftreten, da jeder Punkt für zwei Formen als Anfangspunkt dienen kann. Es sind folgende:

$$(AB \,.\, CD) = (BA \,.\, DC) = (CD \,.\, AB) = (DB \,.\, BA);$$
$$(AD \,.\, CB) = (BC \,.\, DA) = (CB \,.\, AD) = (DA \,.\, BC).$$

Zwischen den Doppelverhältnissen aller drei Folgen besteht die sofort als richtig erkennbare Gleichung

$$(AB \,.\, CD)\,(AC \,.\, DB)\,(AD \,.\, BC) = -1.$$

Zus. 2. Für vier Punkte einer Geraden A, B, C, D gelten die Gleichungen (§ 8; 1.)

$$AB + BC + CA = 0;$$
$$AB = AD + DB;\; BC = BD + DC;\; CA = CD + DA.$$

Multiplicirt man unter den drei letzten Gleichungen die erste mit CD, die zweite mit AD, die dritte mit BD, und addirt die Produkte, so erhält man

$$AB \,.\, CD + BC \,.\, AD + CA \,.\, BD = 0.$$

Dividirt man diese Gleichung nach einander durch den negativen Werth eines jeden Gliedes, so ergiebt sich

$$\text{I.} \qquad (AB \,.\, CD) + (AC \,.\, BD) = 1,$$
$$\text{II.} \qquad (AB \,.\, DC) + (AD \,.\, BC) = 1,$$
$$\text{III.} \qquad (AD \,.\, CB) + (AC \,.\, DB) = 1.$$

In jeder dieser Gleichungen lässt sich das eine Doppelverhältniss aus dem andern durch Vertauschung der mittleren Buchstaben ableiten; beide haben also im Nenner ein Produkt aus denselben Strecken, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen. Den beiden letzten Gleichungen kann man folgende Gestalt geben:

$$(AB \,.\, DC) + \frac{1}{(AC \,.\, BD)} = 1,$$
$$\frac{1}{(AB \,.\, CD)} + \frac{1}{(AB \,.\, DC)} = 1.$$

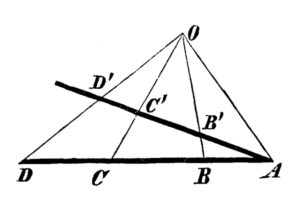
Hiernach kann man alle durch vier Punkte einer Geraden bestimmten Doppelverhältnisse aus einem derselben berechnen.

Wenn vier Punkte einer Geraden in der Ordnung A, B, C, D auf einander folgen, so ist

$$(AB \,.\, CD) \text{ negativ (I.)},$$
$$(AB \,.\, DC) < 1 \text{ und positiv},$$
$$\therefore\ (AD \,.\, BC) < 1 \text{ und positiv (II.)}.$$

A. F. Möbius: Barycentr. Calcul § 184. Kreisverwandtschaft (1855) § 11. 12.

Anmerk. Dass der Hauptsatz auch gilt für $(AB \,.\, CD) = -1$, beweist Pappos VII; 145.



3. Die Punktreihen $ABCD$ und $AB'C'D'$ haben den Punkt A gemein und die Doppelverhältnisse $(AB \,.\, CD)$ und $(AB' \,.\, C'D')$ gleich. — Wenn nun BB' und CC' in O zusammentreffen, und OD schneidet $B'C'$ in Z, so ist (2.)

$$(AB \,.\, CD) = (AB' \,.\, C'Z);$$
$$\therefore\ (AB' \,.\, C'D') = (AB' \,.\, C'Z);$$
$$C'D' : D'A = C'Z : ZA.$$

Hieraus erhält man, nachdem 1 addirt ist:

$$D'A = ZA.$$

Z fällt also mit D' zusammen und $OD'D$ ist eine Gerade.

I. Wenn zwei Punktreihen zu vier ein Doppelverhältniss gleich haben, und zwei entsprechende Punkte desselben zusammenfallen, so liegen sie perspectivisch auf einem Strahlbüschel.

Pappos VII; 136. 142. 143.

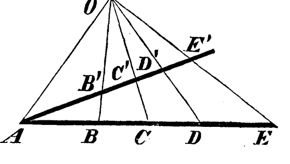
Da man stets, wenn zwei Gerade in einem Doppelverhältnisse zwischen je 4 Punkten übereinstimmen, sich zwei entsprechende Punkte derselben als zusammenfallend vorstellen kann, so ergiebt sich (§ 48; 1. Zus. 1.):

II. Zwei Punktreihen sind collinear, wenn je vier Punkte derselben in einem Doppelverhältnisse übereinstimmen.

Möbius: Baryc. C. § 226.

4. Für zwei Punktreihen $BCDE\,..$, $B'C'D'E'\,..$ gelte die

Gleichung $(BC \,.\, DE) = (B'C' \,.\, D'E')$, und es treffen die Projectionsstrahlen BB', CC', DD' in einem Punkte O zusammen. — Schneiden die beiden Punktreihen einander in A, und man zieht OA, so ist (2.)



$$(BA \,.\, DC) = (B'A \,.\, D'C').$$

Als Produkt beider Gleichungen ergiebt sich

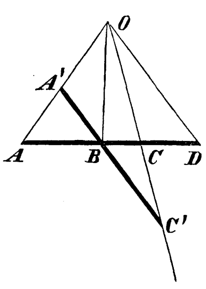
$$(BA \,.\, DE) = (B'A \,.\, D'E').$$

Es ist also A ein selbstentsprechender Punkt der collinearen Punktreihen, und EE' geht durch O (3.).

Wenn zwei Punktreihen von je 4 Punkten in einem Doppelverhältnisse übereinstimmen und es treffen drei Projectionsstrahlen derselben in einem Punkte zusammen, so geht auch der vierte Projectionsstrahl durch diesen Punkt und die Punktreihen haben einen selbstentsprechenden Punkt gemein.

J. Steiner: System. Entw. 14. β.

5. Die Punktreihe $ABCD$.. liege auf einem Strahlbüschel mit dem Projectionspunkte O, und es gehe parallel zu OD durch B eine Gerade, welche OA in A', OC in C' trifft. — Wird der D entsprechende unendlich ferne Punkt der Punktreihe $A'B'C'$ durch D' bezeichnet, so hat man (2.)



$$(AB \,.\, CD) = (A'B \,.\, C'D').$$

Es ist aber (§ 35; 1. Zus. 2) $C'D' = A'D'$;

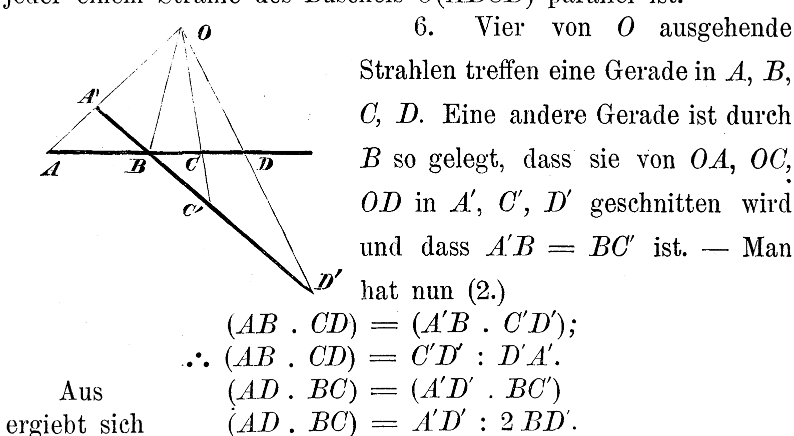
$$\therefore\ (AB \,.\, CD) = - A'B : BC' = A'B : C'B.$$

Liegen vier Punkte einer Punktreihe auf einem Strahlbüschel, so wird jede Gerade, welche einem Strahle des Büschels parallel ist, von den drei übrigen Strahlen unter einem Streckenverhältnisse geschnitten, welches dem Doppelverhältnisse der Punktreihe mit dem entsprechenden Streckenverhältnisse gleich ist.

Pappos VII; 137. — Steiner: Syst. Entw. 7; I. b.

Anmerk. Man kann den vorstehenden Satz auch mittels der ähnlichen Dreiecke $ABA' \backsim ADO$ und $CDO \backsim CBC'$ beweisen.

Zusatz. Der Aufgabe, eine Gerade so zu ziehen, dass sie von drei Strahlen des Strahlbüschels O ($ABCD$) unter einem einfachen Streckenverhältnisse geschnitten werde, welches dem Doppelverhältnisse der Punktreihe $ABCD$ mit dem entsprechenden Streckenverhältnisse gleich sei — genügen vier Strahlbündel, von denen jeder einem Strahle des Büschels $O(ABCD)$ parallel ist.



6. Vier von O ausgehende Strahlen treffen eine Gerade in A, B, C, D. Eine andere Gerade ist durch B so gelegt, dass sie von OA, OC, OD in A', C', D' geschnitten wird und dass $A'B = BC'$ ist. — Man hat nun (2.)

$$(AB\,.\,CD) = (A'B\,.\,C'D');$$
$$\therefore\ (AB\,.\,CD) = C'D' : D'A'.$$

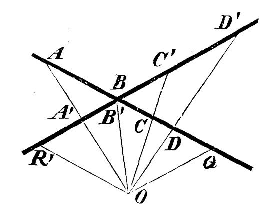
Aus $(AD\,.\,BC) = (A'D'\,.\,BC')$

ergiebt sich $(AD\,.\,BC) = A'D' : 2\,BD'$.

S c h n e i d e t e i n e G e r a d e v i e r S t r a h l e n e i n e s S t r a h l b ü s c h e l s s o, d a s s e i n S c h n i t t p u n k t d i e M i t t e z w i s c h e n z w e i a n d e r n b i l d e t, s o l ä s s t s i c h j e d e s D o p p e l v e r h ä l t n i s s z w i s c h e n d e n v i e r D u r c h s c h n i t t e n d u r c h d r e i d e r s e l b e n a u s d r ü c k e n.

Z u s a t z. Da ein Durchschnitt die Mitte zwischen je 2 der drei übrigen, also die Mitte von drei Strecken, bilden kann, so giebt es 12 Strahlbündel, auf deren Strahlen durch einen Strahlbüschel $O(ABCD)$ zwei gleiche Strecken abgeschnitten werden.

J. Steiner: Syst. Entw. 7. a).



7. Zwei Punktreihen $ABCD$ . ., $A'B'C'D'$ . . liegen perspectivisch auf einem Strahlbüschel mit dem Projectionspunkte O, so dass die entsprechenden Punkte B und B' zusammenfallen. Die nach den unendlich fernen Punkten Q' und R gerichteten Strahlen schneiden die Punktreihen in Q und R', so dass $OQ \parallel A'C'$ und $OR' \parallel AC$ ist. — Nun ist (5.)

$$(AB \,.\, CQ) = A'B' : B'C';$$
$$(A'B' \,.\, C'R') = AB : BC;$$
$$\therefore\ CQ : QA = R'A' : C'R'.$$
$$AQ \,.\, A'R' = CQ \,.\, C'R'.$$

Nennt man die Punkte Q und R', welche den unendlich fernen Punkten entsprechen, Durchschnitte der Parallelstrahlen, dann lässt sich das Ergebniss so ausdrücken:

I. Bei zwei collinearen Punktreihen hat das Längenprodukt aus den Abständen irgend zweier entsprechender Punkte von den Durchschnitten der Parallelstrahlen unveränderlich denselben Werth.

Ist aber umgekehrt $AQ \,.\, A'R' = BQ \,.\, B'R' = CQ \,.\, C'R' = DQ \,.\, D'R'$, so hat man zunächst

$$AQ : BQ = B'R' : A'R';\ BQ : CQ = C'R' : B'R';$$
$$CQ : DQ = D'R' : C'R';\ DQ : AQ = A'R' : D'R'.$$

Subtrahirt man 1 von jeder dieser Gleichungen, so ergiebt sich

$$AB : BQ = B'A' : A'R';\ BC : CQ = C'B' : B'R';$$
$$CD : DQ = D'C' : C'R';\ DA : AQ = A'D' : D'R'.$$
$$\therefore\ (AB \,.\, CD) = (A'B' \,.\, C'D').$$

II. Zwei Punktreihen sind collinear, wenn jedem Punkte der einen Reihe ein Punkt der andern so entspricht, dass die Längenprodukte aus den Abständen je zweier entsprechender Punkte von einem festen Punkte derselben Reihe unveränderlich denselben Werth haben (3).

J. Steiner a. a. O. 12. I.

8. Ein Strahlbüschel mit dem Projectionspunkte O schneide eine Gerade in A, B, C, D, und es sei $\sphericalangle\, BOD = 90^0$, $\sphericalangle\, AOB = BOC$. — Nun ist (§ 43; 6.)

$$AB : BC = AD : CD;$$
$$\therefore\ AB \,.\, CD = BC \,.\, AD.$$

Da nun vier Punkte einer Geraden, A, B, C, D, harmonische Punkte sind, wenn das Längenprodukt aus den beiden äusseren Strecken dem Längenprodukte aus der mittleren und der zwischen den äussersten Punkten liegenden Strecke gleich ist (§ 40.), so ergiebt sich der Satz:

Vier Strahlen eines Strahlbüschels schneiden jede Gerade in vier harmonischen Punkten, wenn die Winkel zweier abwechselnder Strahlen von den beiden übrigen halbirt werden.

Pappos VII; 156.

Zus. 1. Ist die Punktreihe $ABCD$ harmonisch (§ 40.), so hat man

$$AB : BC = AD : CD,$$
$$\therefore (AB \,.\, CD) = -1.$$

Von den positiven Doppelverhältnissen zwischen vier harmonischen Punkten ist (2. Zus. 2)

$$(AC \,.\, BD) = 2;$$
$$(AB \,.\, DC) = \tfrac{1}{2}.$$

Das negative Doppelverhältniss, welches von vier harmonischen Punkten bestimmt wird, ist der negativen Einheit gleich; die positiven haben den Werth 2 oder $\frac{1}{2}$, je nachdem die Strecken ihrer Zähler zwischen abwechselnden oder unmittelbar folgenden Punkten liegen.

Möbius a. a. O. § 198.

Zus. 2. Die Proportion $AD : CD = AB : BC$ kann auch dargestellt werden:

$$\frac{AD}{CD} = \frac{AD - BD}{BD - CD},$$

und wird in dieser Gestalt von Nikomachos (um 100 n. Chr.) in seiner Arithmetik (II; 9) eine harmonische Proportion (ἁϱμονικὴ ἀναλογία) genannt. Die Strecke BD heisst das harmonische Mittel zwischen AD und CD.

Aus der letzten Gleichung folgt

$$2\,AD \,.\, CD = (AD + CD)\, BD;$$
$$\frac{1}{BD} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{AD} + \frac{1}{CD}\right);$$
$$\frac{1}{CD} - \frac{1}{BD} = \frac{1}{BD} - \frac{1}{AD}.$$

Zus. 3. Aus $AB : BC = AD : CD$ erhält man, wenn M die Mitte von BD, also $BM = MD = \frac{1}{2}\, BD$ ist:

$$\frac{AM - BM}{BC} = \frac{AM + MD}{CD} = \frac{AM + MD}{CM + MD};$$
$$\frac{(AM - BM) + (AM + MD)}{BC + CD} = \frac{AM + MD}{CM + MD};$$

$$\frac{AM}{MD} = \frac{AM + MD}{MD + CM} = \frac{MD}{CM};$$

I. $\therefore AM \cdot CM = MD^2 = BM^2.$

$$AM \cdot CM - CM^2 = BM^2 - CM^2;$$

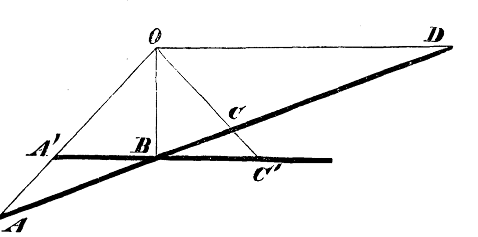
II. $\therefore AC \cdot CM = BC \cdot CD.$

$$AM^2 - AM \cdot CM = AM^2 - BM^2;$$

III. $AC \cdot AM = AB \cdot AD.$

Pappos VII; 160.

9. Die harmonische Punktreihe $ABCD$ liege auf einem Strahlbüschel mit dem Projectionspunkte O, und es gehe durch B eine Gerade parallel zu OD, welche OA in A', OC in C' trifft. — Nun ist (5.)



$$(AB \cdot CD) = A'B : C'B = -1;$$
$$\therefore A'B = BC'.$$

I. Wenn ein Strahlbüschel durch vier harmonische Punkte geht, so schneiden auf jeder Geraden, die einem Strahle parallel läuft, die drei übrigen Strahlen zwei gleiche Strecken ab.

Wird umgekehrt der Strahlbüschel, auf welchem die harmonische Punktreihe $ABCD$ liegt, von einer durch B gehenden Geraden, welche OA, OC, OD in A', C', D' schneidet, so getroffen, dass $A'B = BC'$ ist, so hat man (2.)

$$(AB \cdot CD) = (A'B \cdot C'D') = -1;$$
$$\therefore C'D' = A'D'.$$

D' ist demnach der unendlich ferne Punkt der Geraden $A'C'$, d. h. $OD \parallel A'C'$ (§ 35; 1. Zus. 2).

II. Wenn ein Strahlbüschel durch vier harmonische Punkte geht, und es schneiden drei Strahlen auf einer Geraden zwei gleiche Strecken ab, so ist diese Gerade dem vierten Strahle parallel.

Gregorius a S. Vincentio: De linearum potentiis pr. 7.

10. Die harmonische Punktreihe $ABCD$ liege auf einem Strahlbüschel mit dem Projectionspunkte O. Ferner sei

I. $\sphericalangle AOB = BOC$. — Errichtet man in B auf OB eine Senkrechte, welche OA in A', OC in C' trifft, so ist

$$OBA' \cong OBC';$$
$$\therefore A'B = BC';$$
$$\therefore A'C' \parallel OD \text{ (9; II.)};$$
$$OB \perp OD.$$

II. $\sphericalangle BOD = 90^0$. — Zieht man durch B parallel zu OD eine Gerade, welche OA in A', OC in C' trifft, so ist

$$ABA' \sim ADO,$$
$$BCC' \sim DCO;$$
$$\therefore AB : BA' = AD : DO,$$
$$BC : BC' = DC : DO;$$
$$\therefore \frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC'}{BA'} = \frac{AD}{DC}.$$

Vorausgesetzt ist aber $AB : BC = AD : CD;$

$$\therefore A'B = BC';$$
$$OBA' \cong OBC'; \sphericalangle A'OB = C'OB.$$

Wenn ein Strahlbüschel durch vier harmonische Punkte geht, und

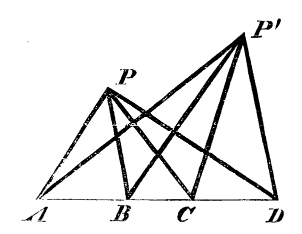
I. es wird ein Winkel zweier Strahlen von einem dritten halbirt, so steht dieser auf dem vierten senkrecht;

II. es stehen zwei abwechselnde Strahlen auf einander senkrecht, so halbirt jeder von ihnen einen Winkel der beiden übrigen.

Den ersten Satz giebt Pappos VI; 52, den zweiten F. Commandino in seinem Commentare zu dieser Stelle.

§ 50.

Die Collineation der Strahlbüschel.



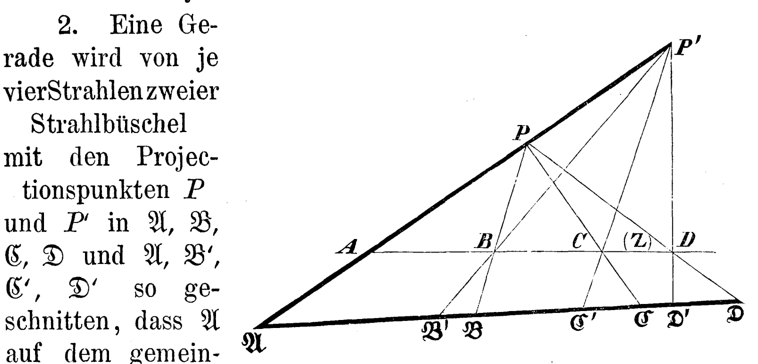
1. Die entsprechenden Strahlen zweier perspectivischer Strahlbüschel mit den Projectionspunkten P und P' treffen in den Punkten A, B, C, D einer Geraden zusammen. — Da nun jeder von den beiden Strahlbüscheln $P(ABCD)$ und $P'(ABCD)$ durch irgend eine Gerade unter Doppelverhältnissen geschnitten wird, die den Doppelverhältnissen der Punktreihe $ABCD$ gleich sind (§ 49; 2), und

da zwei collineare Strahlbüschel stets perspectivisch liegen können (§ 48; 1. Zus. 2), so ergiebt sich:

Von zwei collinearen Strahlbüscheln werden alle Geraden unter gleichen Doppelverhältnissen geschnitten.

J. Steiner: System. Entw. 5.

2. Eine Gerade wird von je vier Strahlen zweier Strahlbüschel mit den Projectionspunkten P und P' in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{D}'$ so geschnitten, dass $\mathfrak{A}$ auf dem gemeinsamen Strahle PP' beider Büschel liegt und $(\mathfrak{A}\mathfrak{B} \,.\, \mathfrak{C}\mathfrak{D}) = (\mathfrak{A}\mathfrak{B}' \,.\, \mathfrak{C}'\mathfrak{D}')$ ist. — Wenn nun die Strahlen $P\mathfrak{B}$ und $P'\mathfrak{B}'$ in B, $P\mathfrak{C}$ und $P'\mathfrak{C}'$ in C einander schneiden, und BC von PP' in A, von $P\mathfrak{D}$ in D, von $P'\mathfrak{D}'$ in Z geschnitten wird, so ist



$$\left.\begin{aligned}(\mathfrak{A}\mathfrak{B} \,.\, \mathfrak{C}\mathfrak{D}) &= (AB \,.\, CD),\\ (\mathfrak{A}\mathfrak{B}' \,.\, \mathfrak{C}'\mathfrak{D}') &= (AB \,.\, CZ);\end{aligned}\right\} \text{§ 49; 2.}$$

$$\therefore (AB \,.\, CD) = (AB \,.\, CZ);$$

$$\therefore CD : DA = CZ : ZA;$$

$$CA : DA = CA : ZA;$$

$$\therefore DA = ZA.$$

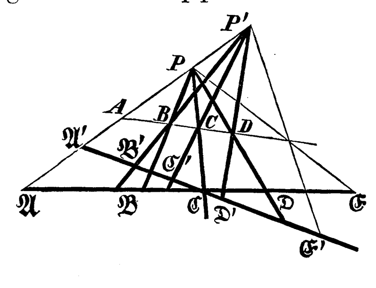
Also fällt der Punkt Z mit D zusammen, und die Strahlbüschel $P\,(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D})$, $P'\,(\mathfrak{A}\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}')$ liegen perspectivisch.

I. Zwei Strahlbüschel sind perspectivisch collinear, wenn sie von einer Geraden unter gleichen Doppelverhältnissen geschnitten werden und zwei entsprechende Strahlen zusammenfallen.

Pappos VII; 130.

Da man nun stets, wenn zwei Strahlbüschel von einer Geraden unter gleichen Doppelverhältnissen geschnitten werden, den einen Büschel in eine solche Lage gebracht sich denken kann, dass zwei entsprechende Strahlen zusammenfallen, so hat man den Satz:

II. **Zwei Strahlbüschel sind collinear, wenn je vier Strahlen derselben von einer Geraden unter gleichen Doppelverhältnissen geschnitten werden.**



3. Für die Strahlbüschel $P(\mathfrak{BCDE})$ und $P'(\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'\mathfrak{E}')$ sei

$$(\mathfrak{BC} \,.\, \mathfrak{DE}) = (\mathfrak{B}'\mathfrak{C}' \,.\, \mathfrak{D}'\mathfrak{E}'),$$

und es schneiden einander ~~in~~ die Strahlenpaare $P\mathfrak{B}$ und $P'\mathfrak{B}'$, $P\mathfrak{C}$ und $P'\mathfrak{C}'$, $P\mathfrak{D}$ und $P'\mathfrak{D}'$ in den Punkten B, C, D einer Geraden, PP' und BD in A, PP' und $\mathfrak{BD}$ in $\mathfrak{A}$, PP' und $\mathfrak{B}'\mathfrak{D}'$ in $\mathfrak{A}'$. — Nun ist (§ 49; 2)

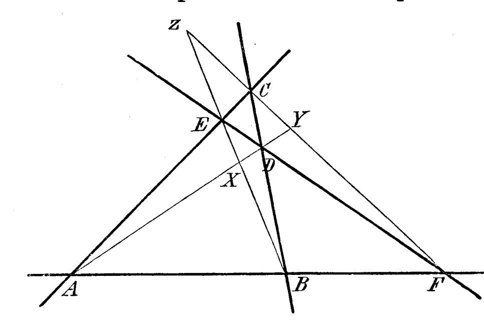
$$(AB \,.\, CD) = (\mathfrak{AB} \,.\, \mathfrak{CD}),$$
$$(AB \,.\, CD) = (\mathfrak{A}'\mathfrak{B}' \,.\, \mathfrak{C}'\mathfrak{D}');$$
$$\therefore\ (\mathfrak{AB} \,.\, \mathfrak{CD}) = (\mathfrak{A}'\mathfrak{B}' \,.\, \mathfrak{C}'\mathfrak{D}').$$

Also fallen in $\mathfrak{AA}'$ zwei entsprechende Strahlen zusammen, und die collinearen Strahlbüschel $P(\mathfrak{BCDE})$ und $P'(\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'\mathfrak{E}')$ liegen perspectivisch (2. I.).

Zwei collineare Strahlbüschel liegen perspectivisch, wenn irgend drei entsprechende Strahlenpaare einander auf einer Geraden schneiden.

J. Steiner: System. Entw. 14.

Zusatz. Behufs der Construction zweier perspectivischer Strahlbüschel können ausser dem in der Verbindungslinie der Projectionspunkte zusammenfallenden selbstentsprechenden Strahle noch zwei entsprechende Strahlenpaare beliebig angenommen werden.



4. In dem vollständigen Vierseite $ABCDEF$ schneiden einander die Diagonalen AD und BE in X, AD und CF in Y, BE und FC in Z. — Nun sind die Strahlbüschel $A(BXEZ)$ und $D(BXEZ)$ perspectivisch collinear, daher werden sie von der Diagonale CF unter gleichen Doppelverhältnissen geschnitten (1.),

$$\therefore\ (FY \,.\, CZ) = (CY \,.\, FZ).$$

Die beiden Doppelverhältnisse dieser Gleichung sind negativ und reciprok in Bezug auf einander, daher haben sie den Werth — 1 und F, Y, C, Z sind 4 harmonische Punkte.

Auf jeder Diagonale eines vollständigen Vierseits sind die Ecken und Nebenecken vier harmonische Punkte.

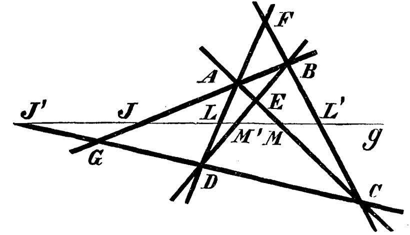
Pappos beweist (VII; 131) eine Umkehrung dieses Satzes. Den vorstehenden Beweis desselben giebt A. F. Möbius (Barycentr. Calcul § 198; 3). — Vgl. Carnot: Géom. de pos. 225.

Vier Strahlen eines Strahlbüschels werden harmonische Strahlen genannt, wenn sie durch 4 harmonische Punkte gehen.

Zusatz. In dem vollständigen Vierecke ($ABDE$) ist CF eine Diagonale, $F(AXDY)$ ein harmonischer Strahlbüschel,

$$\therefore (AX \,.\, DY) = (BX \,.\, EZ) = -1.$$

In einem vollständigen Vierecke wird jede Seitenlinie durch drei Ecken und den Durchschnitt einer Diagonale harmonisch getheilt.



5. In dem vollständigen Vierecke ($ABCD$) treffen die gegenüber liegenden Seitenlinien AB und CD, AD und CB, AC und BD in G, F und E zusammen. Eine beliebige Gerade g schneidet AB, CD, AD, BC, AC, BD in J, J', L, L', M, M'. — Mittels der perspectivischen Strahlbüschel A ($BEM'D$) und C ($BEM'D$) erhält man (1.)

$$(JM \,.\, M'L) = (L'M \,.\, M'J')$$
$$\therefore (JM \,.\, M'L) = (J'M' \,.\, ML').$$

Von den sechs Schnittpunkten, welche auf der Geraden g liegen, können also, wie die letzte Gleichung zeigt, die auf den gegenüber liegenden Seitenstrecken befindlichen als einander collinear entsprechend angesehen werden (§ 49; 3. II.).

Wenn unter sechs Punkten einer Geraden drei Paare collinear entsprechend sind, so dass das Doppelverhältniss zwischen irgend vier Punkten aus allen drei Paaren dem Doppelverhältnisse zwischen den entsprechenden Punkten gleich ist, dann bilden die sechs Punkte eine Involution. So hat man den Satz:

I. Die sechs Seitenlinien eines vollständigen

Vierecks werden von einer Geraden in sechs Punkten geschnitten, welche eine Involution bilden und unter denen die Durchschnitte je zweier gegenüber liegender Seitenlinien einander entsprechen.

Anmerk. Dieser Satz kann als eine Umkehrung von 2. I. betrachtet werden. Die Bezeichnung „Involution" rührt her von Desargues (1639).

Die obige Gleichung $(JM \,.\, M'L) = (J'M' \,.\, ML')$ kann auch ausgedrückt werden

$$(JM \,.\, L'J' \,.\, M'L) = -1.$$

Die Punktreihe $JL'M'$ wird also durch M, J' und L nach einem Dreieckschnittsverhältnisse getheilt, dessen Werth -1 ist.

II. Die Punktreihe, welche auf einer Geraden durch drei aus einer Ecke kommende Seitenlinien eines vollständigen Vierecks bestimmt wird, erfährt durch die drei übrigen Seitenlinien eine Theilung nach einem Dreieckschnittsverhältnisse, dessen Werth -1 ist, und das eine Involution zwischen den sechs Punkten ausdrückt.

Zus. 1. Ausser der Involutionsgleichung

I. $(JM \,.\, M'L) = (J'M' \,.\, ML')$

lassen sich mittels der Strahlbüschel $A\,(J'GDC)$ und $B\,(J'GDC)$, $A\,(FBL'C)$ und $D\,(FBL'C)$, $B\,(FALD)$ und $C\,(FALD)$, $B\,(AEMC)$ und $D\,(AEMC)$, $C\,(AGBJ)$ und $D\,(AGBJ)$, $A\,(GCDJ')$ und $B\,(GCDJ')$ noch folgende aufstellen:

II. $(J'J \,.\, LM) = (JJ' \,.\, L'M')$,

III. $(LJ \,.\, L'M) = (L'J' \,.\, LM')$,

IV. $(L'J \,.\, LM') = (LJ' \,.\, L'M)$,

V. $(JM' \,.\, ML') = (J'M \,.\, M'L)$,

VI. $(MJ' \,.\, L'J) = (M'J \,.\, LJ')$,

VII. $(JM \,.\, LJ') = (J'M' \,.\, L'J)$.

Unter diesen können die Gleichungen I., II., V. und VII. als Dreieckschnittsverhältnisse ausgedrückt werden:

I.' $(JM \,.\, L'J' \,.\, M'L) = -1$,

II.' $(LM \,.\, J'L' \,.\, M'J) = -1$,

V.' $(JM' \,.\, LJ' \,.\, ML') = -1$,

VII.' $(JM \,.\, LJ' \,.\, M'L') = -1$.

Aus jeder der obigen sieben Gleichungen können die sechs übrigen berechnet werden. Man erhält z. B. aus IV. (§ 49; 2. Zus. 2):

$$(L'L \,.\, JM') = (LL' \,.\, J'M).$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $M'M : L'L$, so kommt

$$\frac{M'M}{LJ} \cdot \frac{JM'}{M'L'} = \frac{MM'}{L'J'} \cdot \frac{J'M}{ML'}$$

oder $$(JM' \,.\, ML) = (J'M \,.\, M'L');$$

$$\therefore (JM \,.\, M'L) = (J'M' \,.\, ML') \text{ (§ 49; 2. Zus. 2).}$$

Dies ist die Gleichung I.

Wenn also unter drei Paaren von entsprechenden Punkten einer Punktreihe vier aus allen drei Paaren genommene Punkte mit den ihnen entsprechenden eine Involution bilden, so besteht eine solche auch zwischen beliebigen vier anderen Punkten und den entsprechenden.

Zwei collineare Punktreihen $ABCD$ und $A'B'C'D'$ einer Geraden liegen involutorisch, wenn irgend einem Punkte A', der aus der zweiten Reihe genommen ist aber als Punkt der ersten Reihe betrachtet wird, der Punkt A als zur zweiten Reihe gehörig entspricht. Denn aus

$$(A'B \,.\, CD) = (AB' \,.\, C'D')$$

folgt (V.) $$(A'B \,.\, C'D) = (AB' \,.\, CD') \text{ etc.}$$

Zus. 2. Wird die Gerade g parallel zu einer Seitenlinie CD gelegt, so ist J' der unendlich ferne Punkt derselben und man erhält aus der Gleichung $(JM \,.\, L'J' \,.\, M'L) = -1$

$$ML' : JM = LM' : JL,$$

oder $$\frac{JL' - JM}{JM} = \frac{JM' - JL}{JL};$$

$$\therefore JL \,.\, JL' = JM' \,.\, JM.$$

In J fallen demnach die Durchschnitte der Parallelstrahlen (§ 49; 7) für die collinearen Punktreihen $LM..$ und $L'M'..$ zusammen. J wird der Mittelpunkt der Involution, und das Längenprodukt aus seinen Abständen von zwei entsprechenden Punkten die Potenz der Involution genannt.

Wird ein vollständiges Viereck von einer Geraden geschnitten, die einer Seitenlinie parallel läuft, so ist der Durchschnitt mit der gegenüber liegenden Seitenlinie der Mittelpunkt der Involution.

Pappos entwickelt (VII; 127. 128) zwei Sätze, die im Wesentlichen Umkehrungen des vorstehenden sind.

Zus. 3. Geht die Gerade g durch eine Nebenecke E des vollständigen Vierecks, so fallen in diesem Punkte zwei ent-

sprechende M und M' zusammen; er wird also zum Doppelpunkte der Involution, und man hat (Zus. 1. III.)

$$\frac{LE^2}{L'E^2} = \frac{LJ \cdot LJ'}{L'J \cdot L'J'}.$$

und (Zus. 1. I.') $\dfrac{EJ \cdot EL}{EJ' \cdot EL'} = - \dfrac{LJ}{L'J'}$ etc.

Zus. 4. Geht die Gerade g durch zwei Nebenecken E und G des vollständigen Vierecks, so bilden diese beiden Punkte Doppelpunkte der Involution und die Gleichung

$$(JM \cdot L'J' \cdot M'L) = -1 \text{ (Zus. 1.)}$$

geht über in

$$(GL' \cdot EL) = -1$$

G, L', E L sind also vier harmonische Punkte. Da die Gerade EG eine Diagonale des vollständigen Vierseits $AECBDG$ bildet, so ergiebt sich, dass der Satz unter Nr. 4 nur einen besonderen Fall der Involution einer Punktreihe darstellt.

Chasles: Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie etc. (1837). Note X der Uebersetz. von Sohnke.

6. Auf einer Geraden liegen sieben Punkte O, J, J', L, L', M, M' so, dass die Gleichung besteht

$$OJ \cdot OJ' = OL \cdot OL' = OM \cdot OM'. -$$

Nun ist $OJ' : OL = OL' : OJ$; $OL' : OM = OM' : OL$; $OM' : OJ = OJ' : OM$.

Subtrahirt man 1 von jeder dieser letzten Gleichungen, so ist

$$LJ' : OL = JL' : OJ;\ ML' : OM = LM' : OL;$$
$$JM' : OJ = MJ'\ OM;$$

$$\therefore \frac{JL'}{LJ'} = \frac{OJ}{OL};\ \frac{LM'}{ML'} = \frac{OL}{OM};\ \frac{MJ'}{JM'} = \frac{OM}{OJ}.$$

Das Produkt der vorstehenden Gleichungen

$$(JL' \cdot MJ' \cdot LM') = -1$$

zeigt (5. Zus. 1. V.'), dass J und J', L und L', M und M' entsprechende Punkte einer Involution sind, deren Mittelpunkt O ist (5. Zus. 2).

Drei Paare von Punkten einer Geraden bilden eine Involution, wenn die Längenprodukte aus den Abständen der Punkte eines jeden Paares von einem festen Punkte der Geraden einander gleich sind.

Chasles, a. a. O.

7. Umgekehrt, wenn die Punktpaare J und J', L und L',



M und M' eine Involution bilden und man hat für einen Punkt O der Geraden $OL \,.\, OL' = OM \,.\, OM'$, so ist

$$(JL' \,.\, MJ' \,.\, LM') = -1 \text{ (5. Zus. 1. V'.).}$$

Bestimmt man nun einen J entsprechenden Punkt V, welcher der Gleichung $OL \,.\, OL' = OM \,.\, OM' = OJ \,.\, OV$ genügt, so ist (6.)

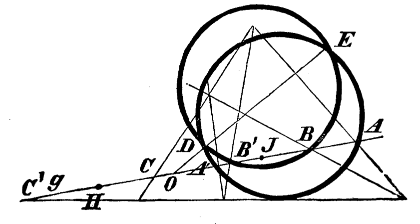
$$(JL' \,.\, MV \,.\, LM') = -1.$$
$$\therefore MJ' : J'L = MV : VL;$$
$$J'L = VL.$$

V fällt demnach mit J' zusammen.

Bei drei involutorischen Punktpaaren ist der Mittelpunkt zweier Paare auch der des dritten.

Chasles a. a. O.

8. Es seien A und A', B und B', C und C' drei Paare von entsprechenden involutorischen Punkten einer Geraden g. — Beschreibt man über den Strecken AA' und BB' zwei Kreise, die einander in D und E schneiden, treffen ferner die Geraden g und DE in O zusammen, so ist (§ 42; 9)



$$OD \,.\, OE = OB \,.\, OB' = OA \,.\, OA'.$$
$$\therefore OC \,.\, OC' = OB \,.\, OB' = OA \,.\, OA' \text{ (7.).}$$

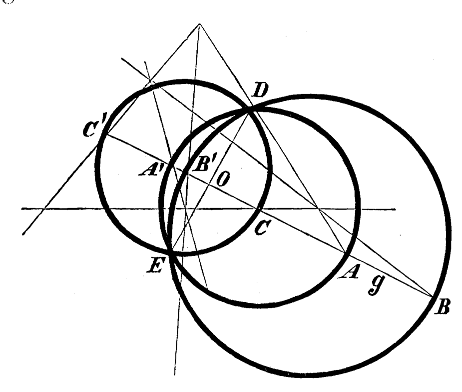
Construirt man nun einen Kreis über CC' als Sehne, welcher den Kreis über AA' in D schneidet, so muss die gemeinschaftliche Sehne dieser beiden Kreise durch O gehen. Daher muss ein Kreis, der durch C, C' und D gelegt ist, auch den Punkt E enthalten.

Wenn auf einer Geraden drei involutorische Punktpaare liegen, und man beschreibt über den von entsprechenden Punkten begrenzten Strecken drei einander schneidende Kreise, so gehen die gemeinschaftlichen Sehnen je zweier Kreise durch den Centralpunkt der Involution. Haben aber die drei Kreise einen Punkt D gemein, so gehen sie auch durch einen zweiten gemeinsamen Punkt E.

Zusatz. Es sind hier zwei Fälle zu unterscheiden:

I. Der Centralpunkt O liegt ausserhalb der von den ent-

sprechenden Punktpaaren begrenzten Strecken. Die von dem Mittelpunkte O an die drei Kreise gehenden Tangenten sind dann einander gleich (§ 42; 10). Beschreibt man drei Kreise, in denen die Strecken zwischen den Punktpaaren Durchmesser bilden, so haben die Umfänge keinen Punkt gemein.



II. Der Mittelpunkt O liegt auf den von den entsprechenden Punktpaaren begrenzten Strecken selbst. Beschreibt man nun über diesen Strecken als Durchmesser Kreise, so stehen die gemeinschaftlichen Sehnen auf der Geraden g senkrecht (§ 30; 3); alle drei Kreise gehen daher durch zwei Punkte.

Hieraus ergiebt sich auch umgekehrt: Dreht sich ein rechter Winkel um seinen Scheitel, so bilden die sechs Punkte, in denen seine Schenkel bei drei verschiedenen Lagen eine Gerade schneiden, eine Involution.

M. Chasles: Traité de géométrie supérieure (1852) 200—204.

9. Es seien A und A', B und B', C und C' drei Paare von entsprechenden involutorischen Punkten und O der Mittelpunkt der Involution. — Bestimmt man nun auf derselben Geraden zwei Punkte H und J so, dass

$$OH^2 = OJ^2 = OA \,.\, OA' = OB \,.\, OB' = OC \,.\, OC'$$

ist, so sind H und J Doppelpunkte (5. Zus. 3). Dieselben sind indess nur reell, wenn O sich nicht auf den Strecken AA', BB', CC' selbst befindet (Fig. Nr. 8). In diesem Falle aber ist (5. Zus. 4)

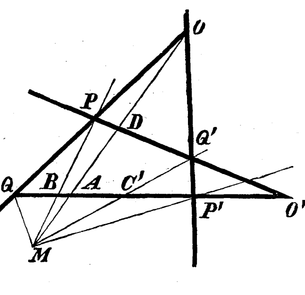
$$(AJ \,.\, A'H) = (BJ \,.\, B'H) = (CJ \,.\, C'H) = -1.$$

Die beiden Doppelpunkte einer involutorischen Punktreihe theilen jede Strecke zwischen zwei entsprechenden Punkten harmonisch.

Chasles: Aperçu historique etc. S. 324 der Uebers.

10. Nennt man einen Strahlbüschel involutorisch, wenn seine Strahlen durch eine involutorische Punktreihe gehen, so ergiebt sich sofort, dass ein involutorischer Strahlbüschel irgend eine beliebige Gerade in einer Punktreihe schneidet, welche eine Involution bildet.

Es seien nun O und O', P und P', Q und Q' gegenüber liegende Ecken eines vollständigen Vierseits. Von einem beliebigen Punkte M gehen Strahlen nach allen sechs Ecken, und es werde $O'Q$ von MO, MP, MQ' in A, B und C' geschnitten; MO treffe PQ' in D. — Nun erhält man mittels der Strahlbüschel $O(PDQ'O')$ und $M(PDQ'O')$



$$(QA \,.\, P'O') = (BA \,.\, C'O');$$
$$\therefore\ (QA \,.\, P'O') = (C'O' \,.\, BA).$$

Mithin sind Q und C', A und O', B und P', entsprechende Punktpaare einer involutorischen Punktreihe. Die von M aus nach den entsprechenden Punkten gerichteten Strahlen gehen aber durch gegenüber liegende Ecken des vollständigen Vierseits. So hat man den Satz:

Ein Strahlbüschel ist involutorisch, wenn sechs Strahlen desselben nach den Ecken eines vollständigen Vierseits gehen, und zwar entsprechen einander diejenigen Strahlen, welche nach gegenüber liegenden Ecken gerichtet sind.

Chasles a. a. O. pag. 328. — Traité de géom. sup. 343.

Zus. 1. Wenn $PQ' \parallel QP'$, mithin der A entsprechende Punkt O' unendlich fern ist, so ergiebt sich

$$QA : AP' = BA : AC'.$$

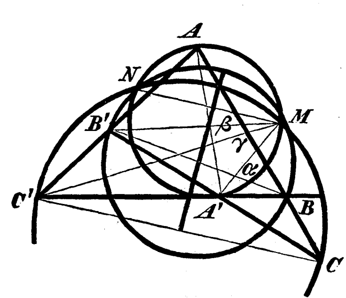
Eine Umkehrung dieses Satzes giebt Pappos VII; 135.

Zus. 2. Der oben für den Hauptsatz gegebene Beweis gilt auch für den Fall, dass der Strahlbüschel $M\,(PDQ'O')$ zum Parallelstrahlbüschel wird, oder M unendlich fern liegt.

Die sechs Strahlen eines Parallelstrahlbüschels, welche durch die Ecken eines vollständigen Vier-

seits gehen, schneiden jede Gerade in einer involutorischen Punktreihe.

Chasles: Traité de géom. sup. 344.



11. In einem vollständigen Vierseite seien A und A', B und B', C und C' gegenüber liegende Ecken. Hierzu kommt:

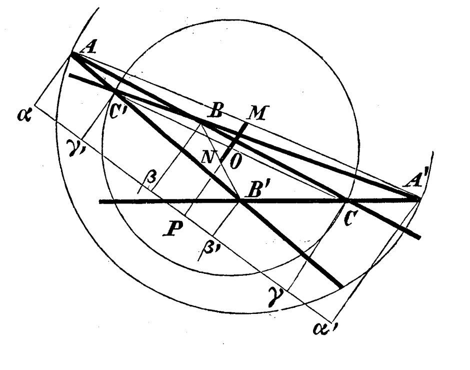
I. Die über den Diagonalen AA' und BB', als Durchmesser, beschriebenen Kreise schneiden einander in M und N. — Wird die Seitenlinie AC von MA', MB' und MC' in α, β und γ geschnitten, so sind A und α, B und β, C und γ entsprechende Punkte einer involutorischen Punktreihe (10.). Der Punkt M liegt, da $\sphericalangle\ AM\alpha = BM\beta = 90^0$ ist, auf den beiden Kreisen, die über den Durchmesser $A\alpha$ und $B\beta$ beschrieben sind. Folglich geht auch der über dem Durchmesser $C\gamma$ construirte Kreis durch M, so dass $\sphericalangle\ CM\gamma = 90^0$ ist (8. Zus. II.). M liegt demnach auch auf dem über dem Durchmesser CC' beschriebenen Kreise. Dass auch N sich auf diesem Kreise befindet, lässt sich auf gleiche Weise zeigen. Die Gerade, welche die Strecke MN senkrecht halbirt, geht also durch die Mittelpunkte der Kreise mit den Durchmessern AA', BB', CC' (§ 24; 7. III.).

Wenn die drei Kreise, deren Durchmesser die Diagonalen eines vollständigen Vierseits sind, einander schneiden, so gehen sie durch zwei Punkte, haben also eine Sehne gemein. Ihre Mittelpunkte liegen auf einer Geraden.

Den ersten Theil dieses Satzes hat Bodenmiller (Gudermann's Analytische Sphärik [1830] S. 138), den zweiten K. F. Gauss (v. Zach's Monatl. Corr. Bd. 22 [1810]) gefunden. Letzterer ist indess, wie das Folgende zeigt, von dem Durchschneiden der Kreise unabhängig.

II. Die über den Diagonalen als Durchmesser beschriebenen Kreise haben keinen Punkt gemein. — Sind nun M, N, O die Mitten von AA', BB', CC', so ziehe man senkrecht zu MN durch einen beliebigen Punkt P dieser Geraden eine andere Ge-

rade, und durch sämmtliche Ecken des vollständigen Vierseits Parallelen zu MN nach der durch P gehenden Geraden, nämlich $A\alpha$, $A'\alpha'$, $B\beta$, $B'\beta'$, $C\gamma$, $C'\gamma'$. Dann ist (10. Zus. 2)



$(\alpha\beta \,.\, \gamma\alpha') = (\alpha'\beta' \,.\, \gamma'\alpha)$,

oder, α und α', β und β', γ und γ' sind entsprechende Punkte einer involutorischen Reihe. Auch ist

$$\alpha P = P\alpha',\ \beta P = P\beta';$$
$$\therefore\ \alpha\beta = \beta'\alpha',\ \alpha\beta' = \beta\alpha'.$$
$$\therefore\ \gamma\alpha' : \beta\gamma = \alpha\gamma' : \gamma'\beta';$$

Nachdem man zu dieser Gleichung 1 addirt hat, erhält man $\beta\gamma = \gamma'\beta'$; $\gamma'P = P\gamma$; $C'O = OC$. O liegt auf MN.

Die Mitten der drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits liegen stets auf einer Geraden.

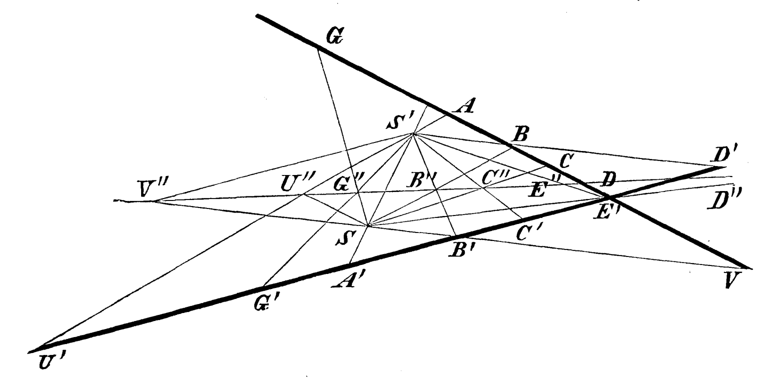
Anmerk. In dem ersten Falle haben die Verhältnisse zweier entsprechender Strecken der involutorischen Punktreihen in der Gleichung $(AB \,.\, C\alpha) = (\alpha\beta \,.\, \gamma A)$ entgegengesetzte Vorzeichen, im zweiten Falle hingegen sind diese Verhältnisse in der involutorischen Gleichung $(\alpha\beta \,.\, \gamma\alpha') = (\alpha'\beta' \,.\, \gamma'\alpha)$ mit gleichen Vorzeichen versehen.

§ 51.

Collineare Punktreihen und Strahlbüschel in schiefer Lage.

1. Von zwei Punktreihen seien je drei Punkte A, B, C und $A'B'C'$ als einander collinear entsprechend beliebig angenommen (§ 49; 1). — Wählt man nun auf irgend einem Projectionsstrahle AA' zwei Punkte S und S' als Projectionspunkte der Punktreihen ABC und $A'B'C'$, und schneiden einander die Strahlen SB und $S'B'$ in B'', SC und $S'C'$ in C'', so ist $B''C''$ die Collineationsaxe der Strahlbüschel $S(ABC..)$ und $S'(A'B'C'..)$ (§ 50; 3). Treffen die von S und S' nach dem Durchschnitte der Punktreihen gehenden Strahlen die Collineationsaxe in D'' und E'', so sind in dem Durchschnitte die Punkte D und E' vereinigt. Schneiden

die aus S und S' parallel zu AB und $A'B'$ verlaufenden Strahlen die Collineationsaxe der Strahlbüschel in U'' und V'', denen auf

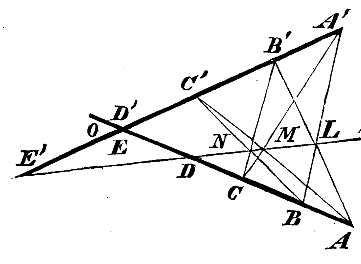


AB und $A'B'$ die unendlich fernen Punkte U und V' entsprechen, so treffen SV'' und $S'U''$ mit den Punktreihen ABC, $A'B'C'$ in V und U', den Durchschnitten der Parallelstrahlen, zusammen. Denn es ist

$$(B''V'' \,.\, C''U'') = (BV \,.\, CU) = (B'V' \,.\, C'U');$$
$$\therefore\ BV : VC = C'U' : U'B';$$
$$BV \,.\, B'U' = CV \,.\, C'U' \text{ (§ 49; 7).}$$

Werden aus S und S' Strahlen durch einen beliebigen Punkt G'' der Collineationsaxe gezogen, so treffen dieselben die gegebenen Punktreihen in den entsprechenden Punkten G und G'.

Wenn von zwei collinearen Punktreihen in schiefer Lage drei entsprechende Punktpaare gegeben sind, so lassen sich mittels des Lineals allein die Gegenpunkte so wie beliebige entsprechende Punkte bestimmen.



2. Wir heben einen besonderen Fall hervor: Es schneiden einander: die collinearen Punktreihen ABC.. und $A'B'C'$ in O, die Geraden AB' und $A'B$ in L, AC' und $A'C$ in M, BC' und $B'C$ in N, LM und AO in D, LM und $A'O$ in E'. — Nun hat man mittels der Strahlbüschel $L(OADB)$ und $M(OADC)$

$$(OA \,.\, DB) = (OB' \,.\, E'A'),$$
$$(OC \,.\, DA) = (OA' \,.\, E'C').$$

Das Produkt dieser Gleichungen

$$(DB \,.\, OC) = (OB' \,.\, E'C')$$

drückt aus, dass D dem Punkte O der Punktreihe $A'B'C'$.., und E' dem Durchschnitte O in der Reihe ABC.. entspricht, in O also D' und E vereinigt sind. Schreibt man die Endgleichung

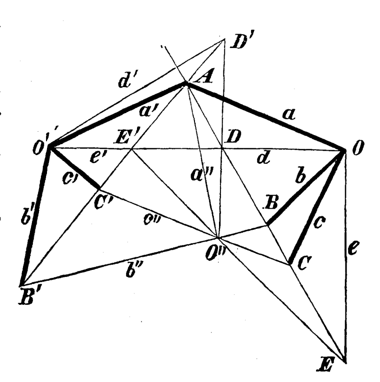
$$(DB \,.\, OC) = (E'C' \,.\, OB'),$$

und beachtet, dass die Geraden BC' und CB' durch N gehen, so ergiebt sich (§ 49; 4), dass die collinearen Punktreihen perspectivisch liegen, also N sich auf der Geraden LM befindet.

Bei zwei collinearen Punktreihen in schiefer Lage schneiden einander die Geraden zwischen den nicht entsprechenden unter je zwei Paar entsprechenden Punkten auf einer Geraden, welche mit den Punktreihen in den ihrem Durchschnitte entsprechenden Punkten zusammentrifft.

Pappos bewies (VII; 139) den vorstehenden Satz, eine Umkehrung desselben (VII; 143), und beide Sätze noch besonders (VII; 138. 141) für den Fall, dass die Punktreihen ABC und $A'B'C'$ parallel sind, jedoch ohne Berücksichtigung der Punkte D und E', welche dem Durchschnitte der Punktreihen entsprechen. In der vorliegenden Gestalt wurde der Satz von J. Steiner (System. Entw. 24) entwickelt.

Zusatz. Wenn von den Ecken eines Sechsecks $AB'CA'BC'$ zweimal drei, die nicht auf einander folgen, wie A, B, C und A', B', C', auf einer Geraden liegen, so befinden sich auch die drei Durchschnitte der gegenüber liegenden Seitenstrecken auf einer Geraden.



3. Von zwei Strahlbüscheln in schiefer Lage $O\ (abc)$, $O'\ (a'b'c')$ seien die Strahlen a und a', b und b', c und c' als einander collinear entsprechend beliebig angenommen. — Treffen a und a' in A zusammen, so ziehe man durch diesen Punkt zwei Gerade, von denen die eine b und c in B und C, die andere b' und c' in B' und C' schneidet. Ist O'' der Durchschnitt von BB' und CC', und bezeichnet man diese

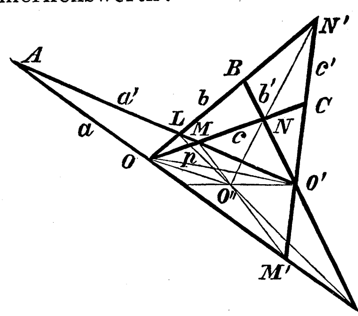
Geraden durch b'' und c'', $O''A$ durch a'', so sind die Punktreihen ABC und $AB'C'$ perspectivisch collinear (§ 49; 2), folglich

$$O(abc) \barwedge O''(a''b''c''); \; O'(a'b'c') \barwedge O''(a''b''c'').$$

Mittels des Projectionspunktes O'' kann jetzt zu jedem Strahle des einen unter den beiden gegebenen Strahlbüscheln der entsprechende Strahl des andern bestimmt werden. Wenn AB und AB' von OO' in D und E' geschnitten werden und es trifft $O''D$ die Gerade AB' in D', $O''E'$ die Gerade AB in E, so entsprechen einander OD und $O'D'$, OE und $O'E'$.

Wenn von zwei Strahlbüscheln in schiefer Lage drei beliebige Strahlenpaare als einander collinear entsprechend angenommen sind, so lässt sich mittels des Lineals allein zu jedem Strahle des einen Büschels der ihm entsprechende des andern bestimmen.

Eine bestimmte Lage des Punktes O'' ist besonders bemerkenswerth:



4. In den collinearen und schief liegenden Strahlbüscheln $O(abc)$, $O'(a'b'c')$ schneiden einander die Strahlen a und a' in A, b und b' in B, c und c' in C, a' und b in L, a und b' in L', a' und c in M, a und c' in M', b' und c in N, b und c' in N'. — Bezeichnet man OO' durch p, so bestimmt der Strahlbüschel $O'(pa'b'c')$ auf OA und OB zwei perspectivische Punktreihen

$$OAL'M' \barwedge OLBN'.$$

Die Strahlbüschel $M(OAL'M')$ und $N(OLBN')$ sind also collinear und, da ihre entsprechenden Strahlen MO und NO zusammenfallen, auch perspectivisch (§ 50; 2). Wird der Durchschnitt von MM' und NN' durch O'' bezeichnet, so liegen L, L' und O'' auf einer Geraden, der Collineationsaxe der Strahlbüschel $M(OAL'M')$ und $N(OLBN')$; LL', MM', NN' gehen durch O''. Die Strahlbüschel $O(abc)$ und $O''(ALM)$, $O'(a'b'c')$ und $O''(ALM)$ liegen perspectivisch, da je drei entsprechende Strahlenpaare derselben sich auf einer Geraden schneiden (§ 50; 3). Dem

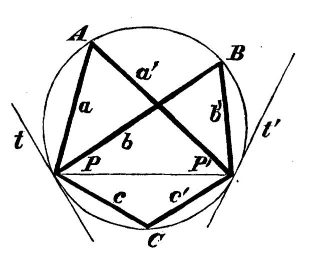
Strahle p entspricht daher OO'' im Strahlbüschel $O(abc)$, $O'O''$ im Büschel $O'(a'b'c')$.

Bei zwei collinearen Strahlbüscheln in schiefer Lage gehen die Geraden zwischen den Durchschnitten von je zwei nicht entsprechenden unter 2 entsprechenden Strahlenpaaren durch einen Punkt, welcher mit den Projectionspunkten durch die ihrer Verbindungslinie entsprechenden Strahlen verbunden ist.

Zusatz. Wenn von den Seitenstrecken eines Sechsecks $LMNL'M'N'$ zweimal drei nicht auf einander folgende durch einen Punkt gehen, so schneiden einander die Diagonalen zwischen den gegenüber liegenden Ecken (LL', MM', NN') in einem Punkte.

J. Steiner: System. Entw. 23. 24.

5. Von zwei auf einem Kreise liegenden Punkten P und P' seien nach den übrigen Kreispunkten A, B, C.. die Geraden a und a', b und b', c und c'... gezogen. In P und P' berühren den Kreis die Tangenten t und t'. — Nun sind die gleichwendigen Winkel der von P und P' nach denselben Kreispunkten gehenden Strahlen einander gleich (§ 25; 7):



$$\sphericalangle\ (a,\ b) = (a',\ b');\ \sphericalangle\ (b,\ c) = (b'\ c')\ldots$$
$$\sphericalangle\ (t,\ a) = (P'P,\ a');\ \sphericalangle\ (a,\ PP') = (a',\ t').$$

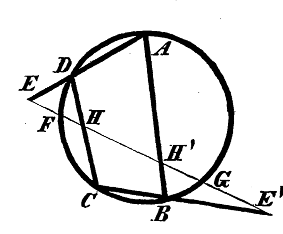
Die Strahlbüschel $P\,(abc)$ und $P'\,(a'b'c')$ sind also congruent (§ 17; 3), befinden sich aber in schiefer Lage, da dem Strahle PP' in $P'(a'b'c')$ die Tangente t', in $P(abc)$ aber t entspricht.

Zwei Strahlbüschel sind gleichwendig congruent, aber in schiefer Lage, wenn ihre Projectionspunkte und die Durchschnitte ihrer entsprechenden Strahlen auf einem Kreise liegen. Den auf der Verbindungslinie der Projectionspunkte zusammenfallenden Strahlen entsprechen die Tangenten in diesen Punkten.

J. Steiner a. a. O. 37.

Zus. 1. Wenn die Projectionspunkte zweier Strahlbüschel und die Durchschnitte ihrer entsprechenden Strahlen auf einem

Kreise liegen, so wird von ihnen jede Gerade in collinearen Punktreihen geschnitten (§ 50; 1.).



Zus. 2. Das einem Kreise eingeschriebene Viereck $ABCD$ werde nebst dem Kreise von einer Querlinie so geschnitten, dass letztere die Seitenlinien AB, BC, CD, DA in H', E', H, E, den Kreis in F und G trifft. — Nun sind die Strahlbüschel $A(DFBG)$ und $C(DFBG)$ collinear, folglich

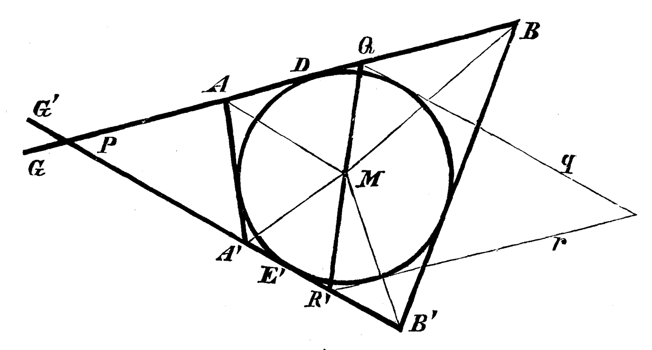
$$(EF \,.\, H'G) = (HF \,.\, E'G);$$
$$\therefore (EF \,.\, H'G) = (E'G \,.\, HF).$$

Die sechs Punkte der Transversalen sind also involutorisch und die entsprechenden Punkte E und E', H und H' liegen auf gegenüber liegenden Seitenlinien der Vierecks $ABCD$.

Eine beliebige Querlinie schneidet einen Kreis und die gegenüber liegenden Seitenlinien eines ihm eingeschriebenen Vierecks in entsprechenden Punkten einer involutorischen Punktreihe.

G. Desargues (1639): Oeuvres, par Poudra (Paris 1864), I. p. 171.

6. Den Kreis um M berühren die Tangenten G und G', welche den Punkt P gemein haben, in D und E'; die ihnen parallelen Tangenten r und q schneiden G' und G in R' und



Q. Ausserdem sind G und G' noch durch die Tangenten AA' und BB' verbunden, die so liegen, dass der Kreis sich ausserhalb des Dreiecks PAA', innerhalb des Dreiecks PBB' befindet. — Das von den Tangenten G, G', r, q gebildete Viereck

ist ein Rhombus (§ 29; 3. — § 21; 7.), daher wird die Diagonale QR' durch M halbirt (§ 21; 3) und es ist $\sphericalangle\ PQM = PR'M$. Ferner ist $\sphericalangle\ AMA' = DMP$ und $\sphericalangle\ BMB' = 180^0 - PMD$ (§ 27; 1). Setzt man in dem Vierecke $AQR'A'$ $\sphericalangle\ QAA' = 2\alpha$, $\sphericalangle\ AA'R' = 2\alpha'$, so ist $2\alpha + 2\alpha' + 2AQR' = 360^0$; und im Dreiecke AMA' erhält man $\alpha + \alpha' + AMA' = 180^0$;

$$\therefore \sphericalangle\ AMA' = AQM = A'R'M;$$
$$\sphericalangle\ BQM = B'R'M = BMB'.$$
$$\therefore \triangle\ AMA' \backsim AQM \backsim MR'A';$$
$$\triangle\ BMB' \backsim BQM \backsim MR'B'.$$
$$\therefore AQ : QM = MR' : R'A';$$
$$BQ : QM = MR' : R'B';$$

oder

$$QM \,.\, MR' = QM^2 = MR'^2 = AQ \,.\, R'A' = BQ \,.\, R'B'.$$

Hiernach sind die Längenprodukte der Strecken unveränderlich, welche von den festen Punkten Q und R', sowie von den Durchschnitten beliebiger Tangenten mit den festen Tangenten G und G' bestimmt werden. Die Punkte Q, R' kann man daher als die Durchschnitte der Parallelstrahlen der collinearen Punktreihen $AB..$, $A'B'..$ ansehen (§ 49; 7).

Die rechtwinkligen Dreiecke PMQ und MDQ, PMR' und $ME'R'$ sind ähnlich, daraus folgt

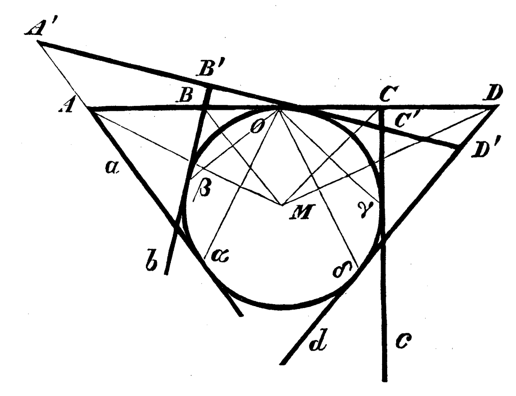
$$QM^2 = R'M^2 = PQ \,.\, DQ = PR' \,.\, E'R';$$
$$PR' \,.\, DQ = PQ \,.\, E'R'.$$

In P fallen mithin die Punkte D' und E zusammen. Die collinearen Punktreihen $AB..DE$ und $A'B'..D'E'$ sind demnach in schiefer Lage.

Irgend zwei Tangenten eines Kreises werden von den übrigen Tangenten in entsprechenden Punkten collinearer aber schief liegender Punktreihen geschnitten; den in ihrem Durchschnitte vereinigten Punkten entsprechen die wechselseitigen Berührungspunkte.

J. Steiner a. a. O. 37.

Zusatz. Vier Tangenten a, b, c, d, welche den Kreis um



M in α, β, γ, δ berühren, schneiden eine fünfte und sechste Tangente in A, B, C, D und A', B', C', D'. — Nun ist $\sphericalangle AMB = A'MB'$, $\sphericalangle AMC = A'MC' \ldots$

$$\therefore M(ABCD) \cong M(A'B'C'D');$$
$$\therefore (AB \, . \, CD) = (A'B' \, . \, C'D');$$
$$ABCD \barwedge A'B'C'D'.$$

Von sechs Tangenten eines Kreises werden zwei durch die vier übrigen in collinearen Punktreihen geschnitten.

7. Die Tangente AB berühre den Kreis in O. Dann ist $MA \perp O\alpha$, $MB \perp O\beta$, $MC \perp O\gamma$ etc., folglich $\sphericalangle AMB = \alpha O\beta$, $\sphericalangle AMC = 180^0 - \alpha O\gamma$, wobei aber zu beachten, dass der Nebenwinkel von $\alpha O\gamma$ dem Winkel AMC gleich ist und beide gleichwendig sind; etc. Hieraus folgt, dass die gleichwendigen Strahlbüschel $M(ABCD)$ und $O(\alpha\beta\gamma\delta)$ congruent sind.

$$\therefore M(ABCD) \barwedge O(\alpha\beta\gamma\delta).$$

Es ist aber jeder Strahlbüschel, dessen Strahlen durch die Punkte A, B, C, D gehen, $M(ABCD)$ collinear (§ 50; 1). Daher hat man den Satz:

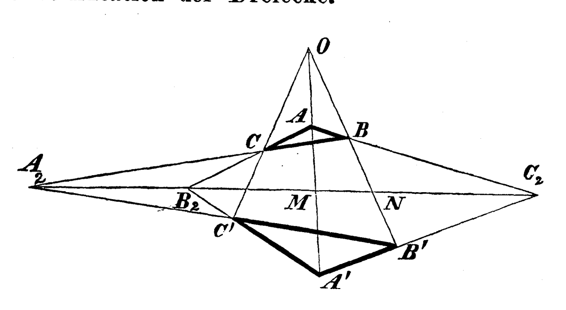
Zwei Strahlbüschel sind collinear, wenn vier Strahlen des einen durch die vier Durchschnitte von vier Tangenten eines Kreises mit einer fünften Tangente gehen, auf vier Strahlen des andern, dessen Projectionspunkt sich auf dem Kreise befindet, die Berührungspunkte jener vier Tangenten liegen.

Chasles: Géom. sup. 663.

§ 52.

Die Collineation der Dreiecke.

1. Auf einem Strahlbüschel mit dem Projectionspunkte O liegen die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ perspectivisch, und die entsprechenden Seitenlinien AB und $A'B'$,



BC und $B'C'$, CA und $C'A'$ treffen in C_2, A_2 und B_2 zusammen. — Nun wird das Dreieck

ABO von der Querlinie $A'B'C_2$,
BCO „ „ „ $B'C'A_2$
CAO „ „ „ $C'A'B_2$

geschnitten, daher ist nach dem Satze des Menelaos (§ 35; 1.)

$$(AC_2 \,.\, BB' \,.\, OA') = -1,$$
$$(BA_2 \,.\, CC' \,.\, OB') = -1,$$
$$(CB_2 \,.\, AA' \,.\, OC') = -1.$$

Das Produkt dieser drei Gleichungen

$$(AC_2 \,.\, BA_2 \,.\, CB_2) = -1$$

drückt aus (§ 35; 2.), dass A_2, B_2, C_2 auf einer Geraden liegen. Dies lässt sich auch durch Ableitung der Gleichung

$$(A'C_2 \,.\, B'A_2 \,.\, C'B_2) = -1$$

beweisen. Die Gerade $A_2B_2C_2$ ist die Collineationsaxe der Dreiecke ABC, $A'B'C'$ (§ 48; 1).

Wenn zwei Dreiecke perspectivisch auf einem Strahlbüschel liegen, so treffen ihre entsprechenden Seitenlinien auf einer Geraden zusammen; die Dreiecke sind also collinear.

Zus. 1. Wird die Collineationsaxe A_2B_2 von AA' und BB' in M und N geschnitten, so ist

$$(OA \,.\, MA') = (OB \,.\, NB').$$

Zus. 2. Es ist (§ 35; 5. Zus. 1.)

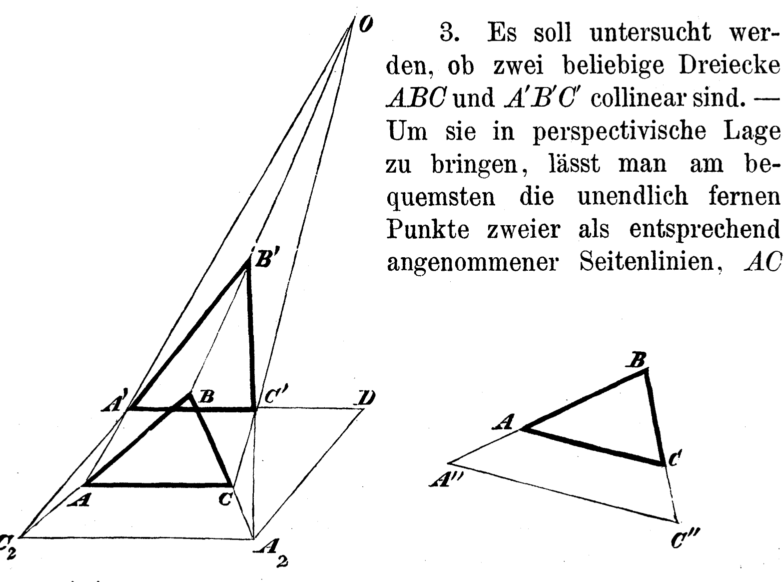
$$\frac{AB^2}{A'B'^2} = \frac{AO \,.\, AC_2 \,.\, BO \,.\, BC_2}{A'O \,.\, A'C_2 \,.\, B'O \,.\, B'C_2}.$$

2. (Umkehrung von 1.) Von den Dreiecken ABC und

$A'B'C'$ treffen die Seitenlinien AB und $A'B'$, BC und $B'C'$, CA und $C'A'$ in den drei Punkten einer Geraden, C_2, A_2 und B_2, zusammen. — Nun liegen die Dreiecke B_2CC' und C_2BB' perspectivisch auf einem Strahlbüschel, dessen Projectionspunkt A_2 ist. Da nun die entsprechenden Seitenlinien B_2C und C_2B in A, B_2C' und C_2B' in A' zusammentreffen, so müssen auch BB' und CC' einander auf der Geraden AA' schneiden (1.). Ihr Durchschnitt O ist also der Projectionspunkt der Dreiecke ABC und $A'B'C'$.

Zwei Dreiecke liegen perspectivisch auf einem Strahlbüschel, wenn ihre Seitenlinien paarweise in drei Punkten einer Geraden zusammentreffen.

Diesen und den vorhergehenden Hauptsatz scheint Desargues (1593—1662) entdeckt zu haben. Beide sind nämlich in dem von Bosse veröffentlichten Werke enthalten: Manière universelle de M. Desargues, pour pratiquer la perspective etc. (1648) p. 403. — Poudra: Oeuvres de Desargues (Paris 1864) I. p. 413.



3. Es soll untersucht werden, ob zwei beliebige Dreiecke ABC und $A'B'C'$ collinear sind. — Um sie in perspectivische Lage zu bringen, lässt man am bequemsten die unendlich fernen Punkte zweier als entsprechend angenommener Seitenlinien, AC und $A'C'$, zusammenfallen, so dass diese Linien parallel werden. Man ziehe parallel zu AC eine Gerade, welche AB in A'', BC in C'' trifft, schneide auf $A'C'$ von A' aus eine Strecke $A'D = A''C''$ ab, ziehe durch D eine Parallele zu $B'A'$, welche $B'C'$ in A_2 trifft, und durch A_2 eine Parallele zu DA', welche $B'A'$ in C_2

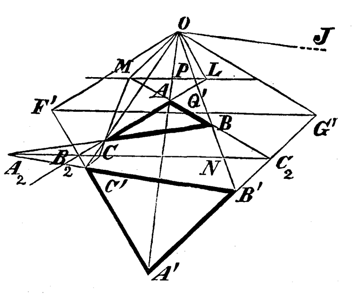
schneidet. Dann ist $C_2A_2 = A'D = A''C''$. Legt man jetzt das Dreieck $A''BC''$ so, dass $A''C''$ mit C_2A_2 zusammenfällt, so ist C_2A_2 die Collineationsaxe der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ (2.); ihre entsprechenden Ecken liegen daher auf den Strahlen eines Strahlbüschels.

Es ist hierbei zu beachten, dass die Punkte B und B' mit O zusammenfallen, wenn die Dreiecke ABC, $A'B'C'$ ähnlich sind, dass im Falle ihrer Affinität einer der Punkte B und B' mit O sich vereinigen oder die Projectionsstrahlen parallel laufen können u. s. w.

Zwei Dreiecke können stets in perspectivische Lage gebracht werden so, dass zwei entsprechende Strecken derselben parallel laufen. Sie sind also stets collinear, wenn nicht zwischen ihnen eine der vier niedrigeren Verwandtschaften besteht.

H. Weissenborn: Die Projection in der Ebene (1862) S. 107.

3. Auf einem Strahlbüschel mit dem Projectionspunkte O liegen die perspectivisch collinearen Dreiecke ABC, $A'B'C'$, deren entsprechende Seitenlinien auf der Collineationsaxe in C_2, A_2 und B_2 zusammentreffen. Aus O seien parallel zu $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ drei Gerade gezogen, welche die entsprechenden Seitenlinien des Dreiecks ABC in J, L, M schneiden. Ebenso gehen von O drei Gerade parallel zu BC, CA, AB aus, welche die entsprechenden Seitenlinien von $A'B'C'$ in E', F' und G' schneiden. — Nun entsprechen offenbar die Punkte J, L, M, E', F', G' den unendlich fernen Punkten der Geraden $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, BC, CA, AB; sie sind also die Durchschnitte der Parallelstrahlen der Seitenlinien, auf denen sie liegen. Man erhält nun mittels der ähnlichen Dreiecke $AMO \backsim AC_2A'$, $BMO \backsim BC_2B'$; $BJO \backsim BA_2B'$, $CJO \backsim CA_2C'$; $CLO \backsim CB_2C'$, $ALO \backsim AB_2A'$: .



$$AM : MO = AC_2 : C_2A';\ MO : MB = C_2B' : C_2B;$$
$$BJ : JO = BA_2 : A_2B';\ JO : JC = A_2C' : A_2C;$$
$$CL : LO = CB_2 : B_2C';\ LO : LA = B_2A' : B_2A.$$

Das Produkt dieser sechs Gleichungen

$$(AM \,.\, BJ \,.\, CL) = -(AC_2 \,.\, BA_2 \,.\, CB_2)\,(A'B_2 \,.\, C'A_2 \,.\, B'C_2),$$
oder, weil $(AC_2 \,.\, BA_2 \,.\, CB_2) = -1$ und
$(A'B_2 \,.\, C'A_2 \,.\, B'C_2) = -1$ ist (1):
$$(AM \,.\, BJ \,.\, CL) = -1,$$
drückt aus, dass die Punkte J, M, L auf einer Geraden liegen. Diese Gerade, welche die Gegenpunkte des Dreiecks ABC enthält, wird seine Axe der Parallelstrahlen genannt.

Ebenso zeigt man, dass die Punkte E', F', G' auf einer Geraden, der Axe der Parallelstrahlen des Dreiecks $A'B'C'$, liegen.

In den ähnlichen Dreiecken $AOL \backsim AA'B_2$, $AOM \backsim AA'C_2$ ist
$$AO : AA' = AL : AB_2 = AM : AC_2.$$

Es ist also $LM \parallel B_2C_2$ (§ 32; 4. Zus. 1.). Ebenso ist $EF \parallel B_2C_2$.

In jedem von zwei perspectivisch collinearen Dreiecken liegen die drei Durchschnitte der Parallelstrahlen auf einer zur Collineationsaxe parallel laufenden Geraden, der Axe der Parallelstrahlen des Dreiecks.

Zusatz. Einer Geraden, welche durch C' parallel zu $A'B'$ gezogen wird, entspricht in dem Dreiecke ABC die Gerade CM; und so überhaupt jeder Geraden, die $A'B'$ parallel ist, eine Gerade im Dreiecke ABC, die durch M geht.

4. Der Strahl BB' schneide die Axe der Parallelstrahlen LM und $F'G'$ der perspectivisch collinearen Dreiecke ABC, $A'B'C'$ in P und Q'. — P entspreche dem unendlich fernen Punkte P', Q' dem unendlich fernen Q. Dann ist, wenn der Durchschnitt von BB' mit der Collineationsaxe durch N bezeichnet wird, (1. Zus. 1.)

$(OP \,.\, NQ) = (OP' \,.\, NQ')$;	$(PQ \,.\, BO) = (P'Q' \,.\, B'O)$;
$\therefore\ OP : PN = NQ' : Q'O$;	$\therefore\ BO : OP = OB' : B'Q'$;
$\therefore\ ON : PN = NO : Q'O$;	$\therefore\ BP : OP = OQ' : B'Q'$;
I. $PN = OQ'$; $OP = Q'N$.	II. $OP \,.\, OQ' = BP \,.\, B'Q'$.

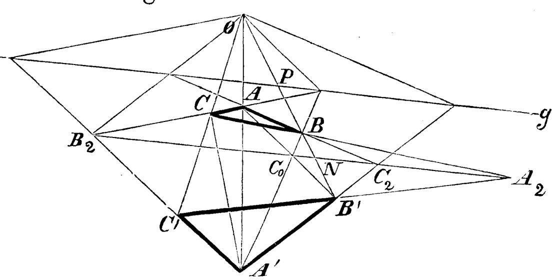
Diese Gleichungen bestehen auch zwischen den Senkrechten aus O, N, B, B' auf die Axe der Parallelstrahlen.

In zwei perspectivisch collinearen Dreiecken ist der Abstand des Collineationspunktes von der einen Axe der Parallelstrahlen dem Abstande der Collineationsaxe von der andern gleich. Das Längenprodukt aus den Abständen zweier entsprechender

Punkte von ihren Axen der Parallelstrahlen ist unveränderlich.

Zusatz. Wenn die Collineationsaxe durch den Projectionspunkt geht, so sind die Abstände des letzteren von den Axen der Parallelstrahlen einander gleich.

5. Die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ seien perspectivisch collinear, und es treffen ihre entsprechenden Seitenlinien AB und $A'B'$



etc. auf der Collineationsaxe in C_2, A_2 und B_2 zusammen. Ausserdem aber liege C_0, der Durchschnitt von AB' und BA', auf der Collineationsaxe. — Hieraus folgt, dass auch

$$AB'C \barwedge A'BC' \text{ und } A'BC \barwedge AB'C'$$

für die Collineationsaxe A_2B_2 ist. Mithin kann jede Ecke des Dreiecks ABC als zu $A'B'C'$ gehörig betrachtet werden, und umgekehrt; so dass A' im Dreiecke ABC der Punkt A im Dreiecke $A'B'C'$ entspricht etc. Folglich muss, wenn man die unter Nr. 4 gebrauchte Bezeichnung anwendet, $BP \,.\, B'Q' = B'P \,.\, BQ'$ sein, d. h. Q' fällt mit P zusammen (4. II.).

Die beiden Axen der Parallelstrahlen fallen also in einer Geraden (Mittellinie, nach Möbius: Collineare Involution, 1856) zusammen, und man hat

$$\text{I. } OP = PN;$$
$$\text{II. } OP^2 = BP \,.\, B'P.$$

Auch bestehen Gleichungen von gleicher Form zwischen den aus O, N, B und B' auf die Mittellinie g gefällten Senkrechten.

Entsprechend der § 50; 5. für involutorische Punktreihen einer Geraden aufgestellten Definition ergiebt sich hier folgende:

Zwei perspectivisch collineare Dreiecke liegen involutorisch und bilden vereint ein involutorisches Sechseck, wenn jedes aus allen drei entsprechenden Eckenpaaren gebildete Dreieck dem durch die drei übrigen Ecken bestimmten für dieselbe Collineationsaxe perspectivisch collinear ist. Das Längenprodukt aus den Abstän-

den zweier entsprechender Punkte von der Mittellinie wird die Potenz der Involution genannt.

Nun lassen sich die Ergebnisse so ausdrücken:

I. Zwei perspectivisch collineare Dreiecke liegen involutorisch, wenn die durch Vertauschung zweier entsprechender Ecken entstehenden Dreiecke die erste Collineationsaxe beibehalten.

II. In zwei involutorischen Dreiecken fallen die Axen der Parallelstrahlen zu einer Geraden zusammen, welche von dem Projectionspunkte halb so weit entfernt ist als die Collineationsaxe. Die Potenz der Involution ist dem Längenquadrate des Abstandes der Mittellinie von dem Projectionspunkte gleich.

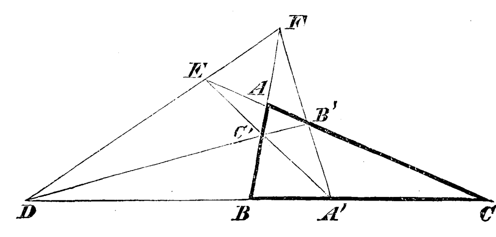
Die Sätze über die Axen der Parallelstrahlen („Gegenaxen“) collinearer $n$ecke finden sich bei L. J. Magnus: Aufg. und Lehrs. aus d. analyt. Geom. (1833) § 13. 14.

Zusatz. Es ist $A(A'C_2NC_0) \barwedge A'(AC_2NC_0)$,

$$\therefore (OB \,.\, NB') = (OB' \,.\, NB);$$

O, B, N, B' sind also vier harmonische Punkte.

In zwei involutorisch liegenden Dreiecken sind auf jedem Strahle die beiden entsprechenden Ecken nebst dem Projectionspunkte und dem Durchschnitte mit der Collineationsaxe vier harmonische Punkte.



6. Von den Seitenlinien des Dreiecks ABC sei jede durch einen inneren und einen äusseren Punkt harmonisch getheilt, und zwar AB durch C' und F, BC durch A' und D, CA durch B' und E; ausserdem liegen die Punkte D, E, F auf einer Geraden. — Nun ist

$$(AF \,.\, BD \,.\, CE) = -1$$
$$\text{und } (EA \,.\, B'C) = -1, (DC \,.\, A'B) = -1,$$
$$(FB \,.\, C'A) = -1.$$

Das Produkt dieser vier Gleichungen

$$(AC' \,.\, BA' \,.\, CB') = 1$$

drückt aus, dass die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ perspectivisch liegen.

Ebenso findet man, dass die Dreiecke ABC und $A'EF$ perspectivisch liegen, wenn $B'C'D$ eine Gerade ist u. s. w.

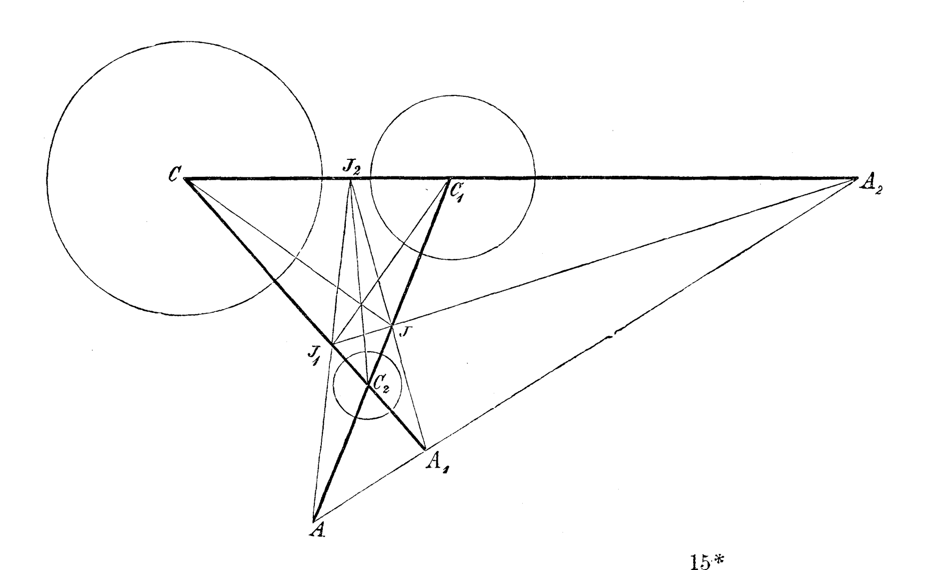
Wird ein Dreieck ABC von einer Querlinie geschnitten, und man bestimmt auf jeder Seitenlinie zu den nun vorhandenen drei Punkten den vierten harmonischen Punkt, so bilden die drei neuen Theilpunkte die Ecken eines mit dem ersteren perspectivischen Dreiecks.

Betrachtet man ABC als das von den Diagonalen eines vollständigen Vierseits gebildete Dreieck, so lässt sich der vorstehende Satz auf folgende Weise ausdrücken:

Jedes durch drei Ecken eines vollständigen Vierseits bestimmte Dreieck, welches dem Diagonalendreieck eingeschrieben ist, liegt mit dem letzteren perspectivisch collinear.

L. J. Magnus a. a. O. § 15.

7. Es seien C, C_1, C_2 die Mittelpunkte, r, r_1, r_2 die Halbmesser dreier Kreise; J, J_1, J_2 die inneren Aehnlichkeitspunkte



der Kreise um C_1 und C_2, C und C_2, C und C_1. Die Durchschnitte von C_1C_2 und J_1J_2, CC_2 und JJ_2, CC_1 und JJ_1 seien A, A_1 und A_2. — Nun ist (§ 44; 8)

$$CJ_2 : J_2C_1 = r : r_1,$$
$$C_1J : JC_2 = r_1 : r_2,$$
$$C_2J_1 : J_1C = r_2 : r.$$

Das Produkt dieser drei Gleichungen

$$(CJ_2 \,.\, C_1J \,.\, C_2J_1) = 1$$

drückt aus (§ 48; 3.), dass die Dreiecke JJ_1J_2 und CC_1C_2 perspectivisch collinear sind, also die Punkte A, A_1, A_2 auf einer Geraden, der Collineationsaxe, liegen. In dem vollständigen Vierseite $AA_1A_2JJ_1J_2$ sind nun AJ, A_1J_1, A_2J_2 die Diagonalen, mithin ist (§ 50; 4):

$$(AC_1 \,.\, JC_2) = (A_1C_2 \,.\, J_1C) = (A_2C_1 \,.\, J_2C) = -1.$$

Die Punkte A, A_1, A_2 sind also die äusseren Aehnlichkeitspunkte der drei Kreise (§ 44; 8).

Das Dreieck zwischen den drei inneren Aehnlichkeitspunkten dreier Kreise ist dem ihm umgeschriebenen Dreiecke zwischen den Mittelpunkten perspectivisch collinear, und es treffen ihre entsprechenden Seitenlinien auf der Collineationsaxe in den äusseren Aehnlichkeitspunkten zusammen.

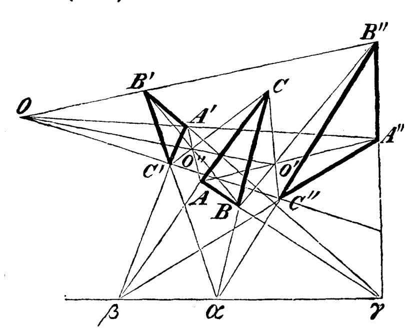
Oder: Von den sechs Aehnlichkeitspunkten dreier Kreise liegen viermal je drei, nämlich die drei äusseren, so wie je zwei innere und ein äusserer, auf einer Geraden.

Zusatz. Da der Berührungspunkt zweier Kreise zugleich ein Aehnlichkeitspunkt derselben ist, so folgt:

Wenn ein Kreis C zwei gegebene Kreise C_1, C_2 berührt, so liegen die beiden Berührungspunkte mit einem Aehnlichkeitspunkte von C_1 und C_2 auf einer Geraden. Letztere geht durch den äusseren oder durch den inneren Aehnlichkeitspunkt, je nachdem C die Kreise C_1 und C_2 gleichartig (d. h. beide von innen oder beide von aussen) oder ungleichartig (d. h. den einen von innen, den andern von aussen) berührt.

Dass die drei äusseren Aehnlichkeitspunkte auf einer Geraden liegen, soll, wie Fuss (Nov. Act. Petr. XIV [1803]. 139) angiebt, D'Alembert zuerst gefunden haben. — J. Steiner: Crelle's J. I. (1826) S. 172. 173.

8. Es seien O, O' und O'' die Projectionspunkte der perspectivisch collinearen Dreiecke $A'B'C' \barwedge A''B''C''$, $ABC \barwedge A''B''C''$, $ABC \barwedge A'B'C'$ deren entsprechende Seitenlinien



je zu dreien in drei Punkten α, β, γ einer Geraden zusammentreffen. — Da die Dreiecke $AA'A''$ und $BB'B''$ perspectivisch auf einem Strahlbüschel mit dem Projectionspunkte γ liegen, so liegen die Durchschnitte O, O' und O'' ihrer entsprechenden Seitenlinien $A'A''$ und $B'B''$, AA'' und BB'', AA' und BB' auf einer Geraden (1.).

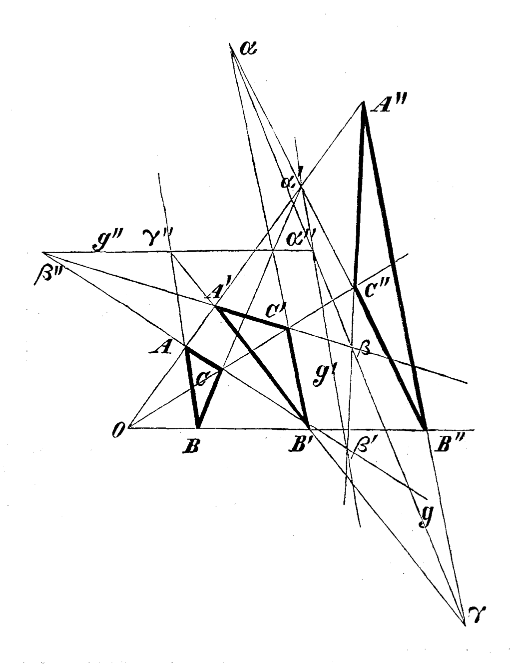
Wenn drei paarweise perspectivisch collineare Dreiecke die Collineationsaxe gemein haben, so liegen ihre drei Collineationspunkte auf einer Geraden.

Chasles: Traité de géom. sup. 388.

9. (Umkehrung von 8.) Es liegen die Projectionspunkte O, O', O'' der paarweise perspectivisch collinearen Dreiecke $A'B'C' \barwedge A''B''C''$, $ABC \barwedge A''B''C''$, $ABC \barwedge A'B'C'$ auf einer Geraden. — Nun ist OO' die Collineationsaxe der Dreiecke $AA'A''$, $BB'B''$, $CC'C''$, mithin liegen sie perspectivisch (2.), d. i. AB, $A'B'$, $A''B''$, sowie BC, $B'C'$, $B''C''$ und CA, $C'A'$, $C''A''$ treffen je in einem Punkte zusammen; diese drei Collineationspunkte liegen auf einer Geraden (8.).

Wenn die drei Collineationspunkte von drei paarweise perspectivisch collinearen Dreiecken auf einer Geraden liegen, so haben sie die Collineationsaxe gemein.

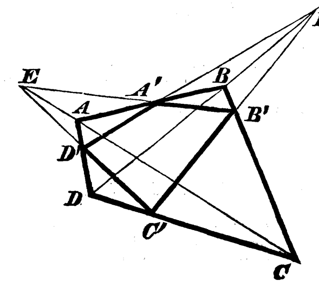
10. Es seien g, g', g'' die Collineationsaxen der perspecti-



visch collinearen Dreiecke $A'B'C'$ $\barwedge$ $A''B''C''$, ABC $\barwedge$ $A''B''C''$, ABC $\barwedge$ $A'B'C'$, welche den Collineationspunkt O gemein haben. — Nun treffen entsprechende Seitenlinien der Dreiecke $\alpha\,\alpha'\alpha''$ und $\beta\beta'\beta''$, welche von den Geraden BC, $B'C'$, $B''C''$ und AC, $A'C'$, $A''C''$ gebildet werden, paarweise in den Punkten C, C', C'' eines Strahles zusammen; mithin treffen die Geraden g, g', g'' oder $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, $\alpha''\beta''$ in einem Punkte zusammen.

Wenn drei paarweise perspectivisch collineare Dreiecke den Collineationspunkt gemein haben, so gehen ihre drei Collineationsaxen durch denselben Punkt.

Chasles a. a. O. 389.



11. Von einem Punkt E auf der Diagonale AC des Vierecks $ABCD$ gehen zwei Gerade aus: die eine schneidet die Strecken AB, BC in A' und B', die andere schneidet die Strecken CD, DA in C' und D'. — Nun sind die Dreiecke $AA'D'$ und $CB'C'$ perspectivisch collinear (1.); die Geraden $B'C'$ und $A'D'$ treffen also in einem Punkte auf der Collineationsaxe BD zusammen. Ausserdem ist jedes der Dreiecke ABC, CDA von einer Querlinie geschnitten (§ 35; 1.),

$$\therefore (AA' \,.\, BB' \,.\, CE) = -1,$$
$$(CC' \,.\, DD' \,.\, AE) = -1.$$

Das Produkt dieser Gleichungen ist

$$(AA' \,.\, BB' \,.\, CC' \,.\, DD') = 1.$$

I. Zwei durch einen Punkt einer Virecks-Diagonale gehende Gerade schneiden die vier Seitenstrecken des Vierecks unter einem Viereckschnittsverhältnisse, dessen Werth gleich eins ist. Die durch sie von dem Vierecke abgeschnittenen Dreiecke sind perspectivisch collinear.

II. Umgekehrt: Theilen die vier Punkte A', B', C', D' die Seitenstrecken eines Vierecks $ABCD$ so, dass

$$(AA' \,.\, BB' \,.\, CC' \,.\, DD') = 1$$

ist, so sind die von ihnen an den gegenüber liegenden Ecken bestimmten Dreiecke $AA'D'$ und $CB'C'$, $BB'A'$ und $DC'D'$ perspectivisch collinear.

Denn, träfe die Diagonale AC mit $A'B'$ in E, mit $C'D'$ in E' zusammen, so hätte man

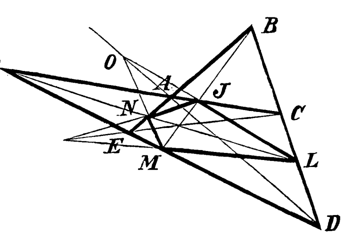
$$(AA' \,.\, BB' \,.\, CE) = -1,$$
$$(CC' \,.\, DD' \,.\, AE') = -1.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen und berücksichtigt, dass $(AA' \,.\, BB' \,.\, CC' \,.\, DD') = 1$ ist, so erhält man

$$CE : EA = CE' : E'A;$$
$$\therefore EA = E'A.$$

Die Punkte E und E' fallen also zusammen, und AC ist die Collineationsaxe der Dreiecke $BA'B'$, $DD'C'$, w. z. b. w.

12. In dem vollständigen Vierseite $ABCDEF$ schneide eine von B auslaufende Gerade AC und DE in J und M, eine von F ausgehende CD und AE in L und N. — Nun ist (§ 49; 2.)



$$(AB \,.\, EN) = (CB \,.\, DL),$$
$$(EF \,.\, DM) = (AF \,.\, CJ);$$
$$\therefore (AB \,.\, EF \,.\, DB \,.\, CF) = (DL \,.\, CJ \,.\, AN \,.\, EM).$$

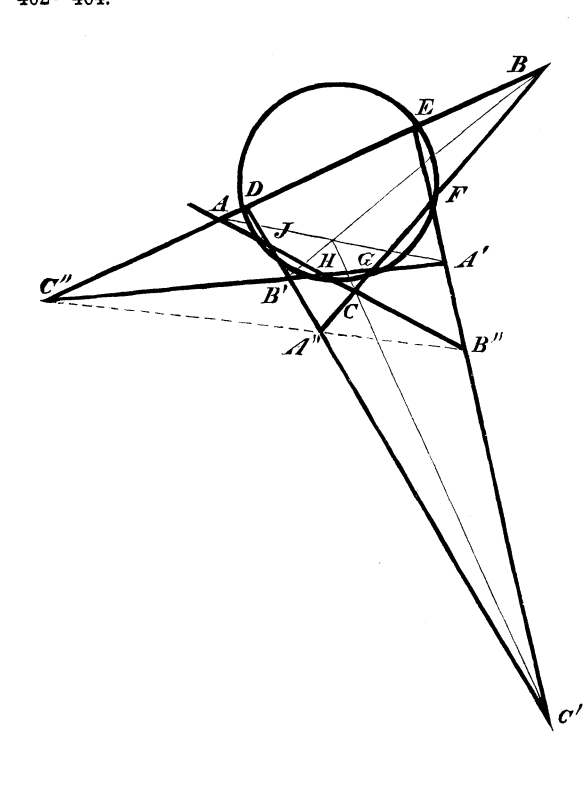
Die linke Seite dieser Gleichung hat den Werth + 1 (§ 35; 5.),

$$\therefore (DL \,.\, CJ \,.\, AN \,.\, EM) = 1.$$

Die gegenüber liegenden Seitenstrecken des Vierecks *JLMN* schneiden einander also auf den Diagonalen des Vierecks *ACDE*.

Zwei Gerade, welche von zwei gegenüber liegenden Ecken eines vollständigen Vierseits ausgehen, schneiden die Seitenlinien des Vierecks zwischen den vier übrigen Ecken in den Ecken eines eingeschriebenen Vierecks, dessen gegenüber liegende Seitenlinien auf den Diagonalen des umgeschriebenen Vierecks zusammentreffen.

Die drei letzten Sätze (11. 12) entwickelte J. V. Poncelet: Traité des propriétés projectives etc. (1822) 165. 166. — Chasles: Traité de géom. sup. 402—404.



13. Je drei abwechselnde Seitenlinien des einem Kreise eingeschriebenen Sechsecks *DEFGHJ* bilden ein Dreieck, und zwar *DE*, *FG*, *HJ* das Dreieck *ABC*, — *GH*, *JD*, *EF* das Dreieck $A'B'C'$, so dass *AB* und $A'B'$, *BC* und $B'C'$, *CA* und $C'A'$ auf gegenüber liegenden Seitenlinien des Sechsecks sich befinden und zugleich paarweise in C'', A'' und B''

zusammentreffen. — Es sind nun die Strahlbüschel $E(DFGJ)$ und $H(DFGJ)$ congruent (§ 51; 5),

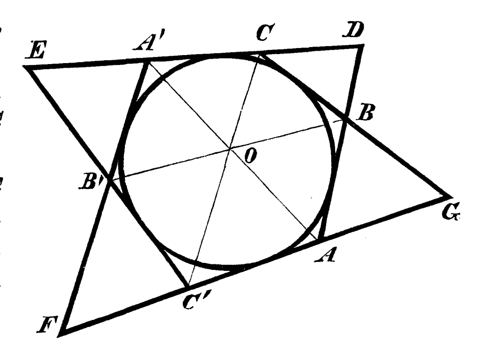
$$\therefore\ E(DFGJ) \barwedge H(JGFD) \text{ (§ 50; 2. II.).}$$

Es schneiden einander: die Strahlen EF, HJ und ED, HG in B'' und C'', die Strahlen EF, HF und EG, HG in F und G, die Strahlen EJ, HJ und ED, HD in J und D. Die Geraden $B''C''$, FG und DJ gehen also durch einen Punkt (§ 51; 4), und zwar durch A'', da nach der Voraussetzung FG und DJ diesen Punkt gemein haben. Die Gerade $A''B''C''$ ist die Collineationsaxe der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ (2.).

Zwei Dreiecke sind perspectivisch collinear, wenn ihre entsprechenden Seitenlinien auf den gegenüber liegenden Seitenlinien eines einem Kreise eingeschriebenen Sechsecks liegen.

B. Pascal hat den wesentlichen Inhalt dieses Satzes in seinen Essais pour les coniques (1640) angegeben, auch gezeigt, dass er für die Kegelschnitte überhaupt gelte.

14. Einem Kreise ist das Sechseck $ABCA'B'C'$ umgeschrieben, von dessen Seitenlinien AB und $A'C$ in D, $B'C'$ und $A'C$ in E, $A'B'$ und AC' in F, BC und AC' in G zusammentreffen. AA' und CC' schneiden einander in O. — Nun ist



$$DCA'E \barwedge AGFC' \text{ (§ 51; 6.)}$$
$$\therefore\ DCA'E \barwedge GAC'F \text{ (§ 49; 2. Zus. 1).}$$

Die Punkte B, O, B', in denen die Geraden DA und CG, CC' und $A'A$, $A'F$ und EC' einander schneiden, liegen demnach auf einer Geraden (§ 51; 2); AA', BB' und CC' gehen durch O.

Zwei Dreiecke sind perspectivisch collinear, wenn ihre entsprechenden Seitenlinien auf den gegenüber liegenden Seitenlinien eines einem Kreise umgeschriebenen Sechsecks liegen.

Brianchon: Journ. de l'École Polytechnique. Cah. XIII.

15. Durch die Ecken B, C, D des vollständigen Vierecks $(ABCD)$ sei ein Kreis gelegt, welcher die Geraden AB, AC, AD bezüglich in B', C', D', schneidet. — Dann ist

$$ABC \backsim AC'B';\ ACD \backsim AD'C';\ ADB \backsim AB'D'$$

$$AB : BC = AC' : C'B';\ CD : DA = D'C' : C'A.$$

I. $\therefore (AB \,.\, CD) = C'D' : C'B'.$

Auf gleiche Weise erhält man

II. $(AC \,.\, DB) = D'B' : D'C'$

III. $(AD \,.\, BC) = B'C' : B'D'.$

Aus diesen drei Gleichungen folgt weiter

IV. $(AB \,.\, CD) : (AC \,.\, DB) : (AD \,.\, BC) = C'D' : D'B' : B'C'.$

Man erhält ferner

$$\sphericalangle\, DCA = AD'C';\ \sphericalangle\, ACB = C'B'A$$

$$\therefore \sphericalangle\, BCD = AD'C' + C'B'A$$

V. $\therefore \sphericalangle\, ABC + CDA = B'\breve{C}'D'$

$$\sphericalangle\, ACB + B\breve{D}A = \sphericalangle\, C'B'A + A\breve{B}'D'$$

VI. $\therefore \sphericalangle\, ACB + B\breve{D}A = C'\breve{B}'D'$

$$\sphericalangle\, DCA + A\grave{B}D = \sphericalangle\, AD'C' + B'\breve{D}'A$$

VII. $\therefore \sphericalangle\, DCA + A\breve{B}D = B'\breve{D}'C'.$

Möbius nennt in einem Vierecke die Summe aus je zwei gegenüber liegenden Winkeln „Doppelwinkel" (Kreisverwandtschaft § 11). Mit Benutzung dieser Bezeichnung lässt sich das Vorstehende in folgendem Satze zusammenfassen.

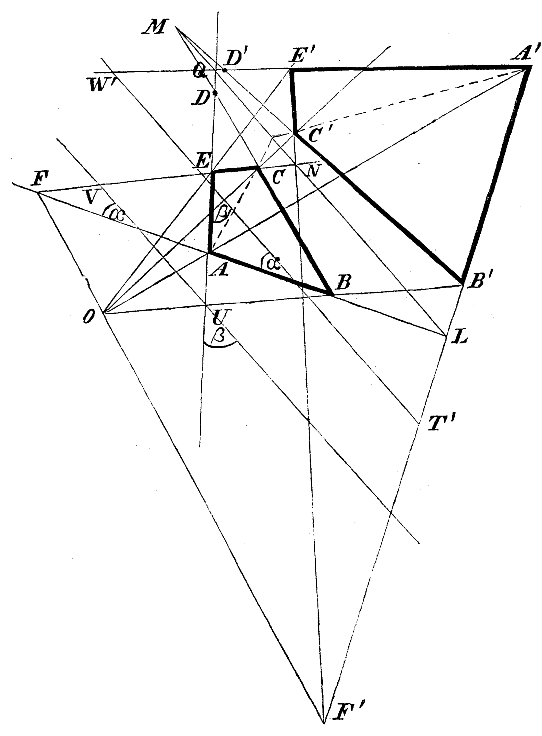
Beschreibt man um drei Ecken eines beliebigen vollständigen Vierecks einen Kreis, so schneidet derselbe die nach der vierten Ecke gehenden Seitenlinien in einem Dreiecke, dessen Streckenverhältnisse und Aussenwinkel den Doppelverhältnissen und Kreisdoppelwinkeln des Vierecks bezüglich gleich sind.

Bretschneider: Grunerts Archiv II. S. 240. — Möbius: Kreisverwandtschaft § 16.

Zusatz. Die Seitenlinien eines vollständigen Vierecks werden von den durch je drei Ecken gehenden Kreisen in vier ähnlichen Dreiecken geschnitten.

§ 53.

Collineation der Vierecke und Vielecke.



1. Die Vierecke $ABCE$ und $A'B'C'E'$ seien perspectivisch collinear, und die entsprechenden Seitenlinien treffen auf der Collineationsaxe in L, M, N, Q zusammen. Der Collineationspunkt sei O. — Wenn AE und BC in D, BA und CE in F, $A'E'$ und $B'C'$ in D', $B'A'$ und $C'E'$ in F' zusammentreffen, so ist (§ 52; 2)

$$BCF \barwedge B'C'F';\; ABD \barwedge A'B'D'.$$

Ferner ist (§ 52; 1)

$$ABC \barwedge A'B'C';\; ABE \barwedge A'B'E'.$$

Es sind also die durch die collinearen Vierecke $ABCE$ und $A'B'C'E'$ bestimmten vollständigen Vierseite und Vierecke collinear.

Wenn zwei Vierecke collinear sind, so sind auch die durch sie bestimmten vollständigen Vierseite und Vierecke collinear.

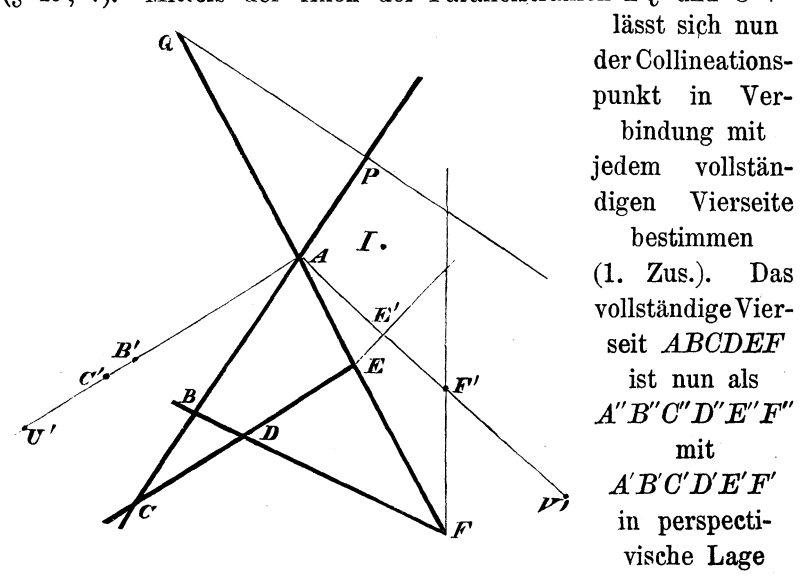
Zusatz. Werden die Linien $A'B'$ und $A'E'$ von zwei durch O parallel zu AB und AE gehenden Geraden in T' und W' geschnitten, so ist die Gerade $T'W'$ die Axe der Parallelstrahlen des Vierecks $A'B'C'E'$, weil sie die Axe der Parallelstrahlen der

Dreiecke $A'E'F'$ und $A'B'D'$ ist (§ 52; 3). Sind U und V die Durchschnitte der Parallelstrahlen der Punktreihen AE und EC, so bildet UV die Axe der Parallelstrahlen des Vierecks $ABCE$.

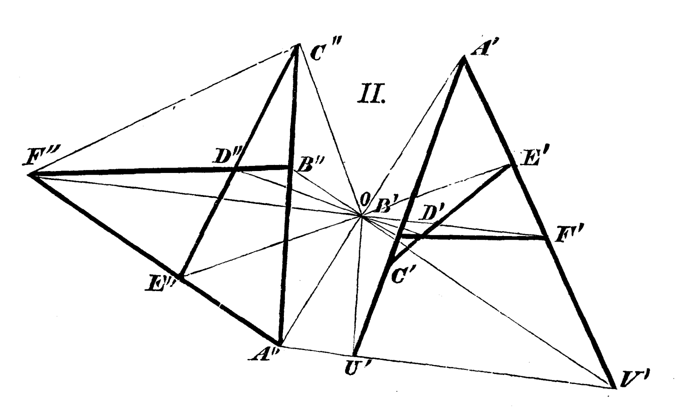
In perspectivischer Lage sind beide Axen der Parallelstrahlen parallel; sie werden also von einer Geraden unter gleichen Winkeln geschnitten (§ 52; 3). Werden sie nun von den Geraden AB und AE unter den Winkeln α und β geschnitten, so ist $\sphericalangle\, OT'W' = \alpha$, $\sphericalangle\, OW'T' = \beta$. Die Schenkel OW' und OT' dieser Winkel schneiden einander also im Collineationspunkte O. So ergiebt sich:

In zwei collinearen vollständigen Vierseiten sind die Axen der Parallelstrahlen und der Collineationspunkt durch die auf zwei Paar entsprechenden Seitenlinien liegenden Punktreihen völlig bestimmt.

2. In den vollständigen Vierseiten $ABCDEF$, $A'B'C'D'E'F'$ sollen die Punktreihen ABC und $A'B'C'$, AEF und $A'E'F'$ als collinear betrachtet werden (§ 49; 1). — Man lege die Punktreihen AEF und $A'E'F'$, sowie ABC und $A'B'C'$ perspectivisch (§ 49; 1), und bestimme (I.) ihre Durchschnitte der Parallelstrahlen Q, V', P, U' (§ 49; 7). Mittels der Axen der Parallelstrahlen PQ und $U'V'$ lässt sich nun der Collineationspunkt in Verbindung mit jedem vollständigen Vierseite bestimmen (1. Zus.). Das vollständige Vierseit $ABCDEF$ ist nun als $A''B''C''D''E''F''$ mit $A'B'C'D'E'F'$ in perspectivische Lage



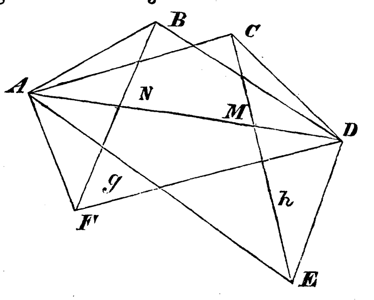
zu bringen (II.). Da ein vollständiges Vierseit durch ein Viereck bestimmt ist (1.), so erhält man den Satz:



Zwei beliebige Vierecke sind collinear und lassen sich stets in perspectivische Lage bringen.

Möbius: Baryc. Calcul § 230. — Magnus a. a. O. § 13.

3. Es seien $ABCDEF$ und $A'B'C'D'E'F'$ zwei collineare Gebilde, in denen die Geraden CE und BF von AD in M und N, die entsprechenden $C'E'$ und $B'F'$ von $A'D'$ in M' und N' geschnitten werden. — Nun ist (§ 49; 2)



$$(AN\,.\,DM) = (A'N'\,.\,D'M').$$

Aber auch

$$\frac{AN}{ND} = \frac{\overline{ANB}}{\overline{DBN}} = \frac{\overline{AFN}}{\overline{DNF}} = \frac{\overline{AFB}}{\overline{DBF}};$$

$$\frac{DM}{MA} = \frac{\overline{DMC}}{\overline{ACM}} = \frac{\overline{DEM}}{\overline{AME}} = \frac{\overline{DEC}}{\overline{AEC}};$$

$$(AN\,.\,DM) = \frac{\overline{ABF}}{\overline{DBF}} \cdot \frac{\overline{DCE}}{\overline{ACE}}.$$

Bezeichnet man die Strecken BF, CE durch g und h, die von A und auf sie gefällten Senkrechten durch Ag, Ah, Dg, Dh, so ergiebt sich aus der Endgleichung die folgende

$$(AN\,.\,DM) = \frac{Ag}{Dg} \cdot \frac{Dh}{Ah}.$$

Auf gleiche Weise erhält man für $A'B'C'D'E'F'$

$$(A'N' \,.\, D'M') = \frac{A'g'}{D'g'} \cdot \frac{D'h'}{A'h'}.$$

$$\text{I.} \quad \frac{Ag}{Dg} \cdot \frac{Dh}{Ah} = \frac{A'g'}{D'g'} \cdot \frac{D'h'}{A'h'};$$

oder auch II. $$\frac{\overline{ABF}}{\overline{DBF}} \cdot \frac{\overline{DCE}}{\overline{ACE}} = \frac{\overline{A'B'F'}}{\overline{D'B'F'}} \cdot \frac{\overline{D'C'E'}}{\overline{A'C'E'}}.$$

Möbius: Baryc. Calc. § 221; 2. — Magnus: Aufg. etc. § 11.

4. Ist eine der beiden letzten Gleichungen (I. II.) gegeben, so lässt sich daraus umgekehrt der Schluss ableiten, dass $(AN \,.\, DM) = (A'N' \,.\, D'M')$ sei. Denn es ist

$$Ag : Dg = AN : ND; \; Dh : Ah = DM : MA;$$

$$\therefore \frac{Ag}{Dg} \cdot \frac{Dh}{Ah} = (AN \,.\, DM) \text{ u. s. w.}$$

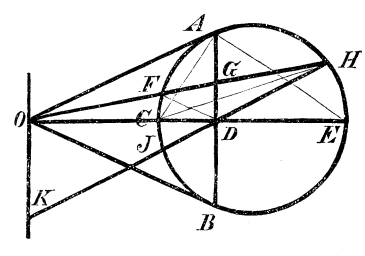
$$\therefore (AN \,.\, DM) = (A'N' \,.\, D'M').$$

Aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse zwischen Dreiecksflächen in collinearen Sechsecken (oder Fünfecken, wenn zwei Ecken wie B und C zusammenfallen) folgt also die Gleichheit der Doppelverhältnisse in entsprechenden Punktreihen.

§ 54.

Collineare Kreisgebilde (Pol und Polare; Potenzlinie).

1. Collineare Bogen eines Kreises und collineare Kreise nebst den durch sie bestimmten entsprechenden Gebilden sollen der Kürze wegen als „collineare Kreisgebilde“ bezeichnet werden.



2. Von einem äusseren Punkte O aus seien an einen Kreis zwei Tangenten gelegt, die ihn in A und B berühren, so dass AB die Sehne zwischen den Berührungspunkten (Berührungssehne) ist. Durch O gehen ferner zwei Sekanten, von denen die eine, welche den Mittelpunkt des Kreises enthält (Mittelpunktssekante), den Kreis in C und E, die Sehne AB in D, die andere den Kreis in F und H, die Berührungssehne in G schneidet. — Da nun $\sphericalangle\, OAC = CAD$ und $\sphericalangle\, CAE = 90^0$ ist, so sind O, C, D, E vier harmonische Punkte (§ 49; 8). In dem Strahlbüschel $H(OCDE)$ ist aber $\sphericalangle\, CHE = 90^0$, mithin — wenn HD den Kreis in J trifft — $\sphericalangle\, OHC$

$= CHJ$ (§ 49; 10) und $\sphericalangle\, FDC = CDJ$. $\sphericalangle\, ODG$ ist aber recht, folglich ist $D(OFGH)$ ein harmonischer Strahlbüschel (§ 49; 8).

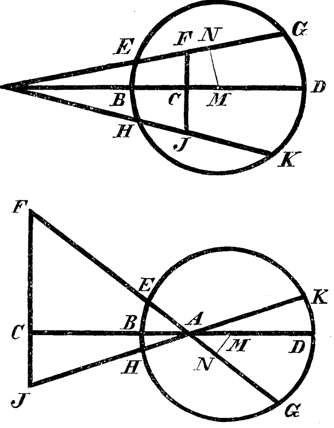
Errichtet man in O auf OC eine Senkrechte und verlängert HJ, bis sie diese Senkrechte in K trifft, so ist, weil $\sphericalangle\, FOC = COJ$ und $\sphericalangle\, COK = 90^0$, $O(KJDH)$ ein harmonischer Strahlbüschel. K, J, D, H sind vier harmonische Punkte.

I. Zieht man von einem äusseren Punkte eine Sekante und die beiden Tangenten nach einem Kreise, so wird die Sekante von dem Kreise und der Berührungssehne harmonisch getheilt.

Pappos VII; 154.

II. Wird eine Mittelpunktssekante durch den Kreis, einen inneren und einen äusseren Punkt harmonisch getheilt, so wird jede durch einen dieser Punkte gehende Sekante von dem Kreise und der in dem andern Punkte auf der Mittelpunktssekante errichteten Senkrechten harmonisch geschnitten.

Pappos VII; 161.



3. Von zwei Sekanten BD, EG geht die eine, BD, durch den Mittelpunkt M eines Kreises; jede ist durch einen inneren und einen äusseren Punkt harmonisch getheilt, nämlich BD durch A und C, EG durch A und F, so dass sie den Punkt A gemein haben; die beiden andern Punkte, C und F, sind durch eine Gerade verbunden. — Fällt man aus M auf EG die Senkrechte MN, so ist

$$\left.\begin{array}{l} AB \,.\, AD = AC \,.\, AM, \\ AE \,.\, AG = AF \,.\, AN; \end{array}\right\} \text{(§ 49; 8. Zus. 3)};$$

$$AB \,.\, AD = AE \,.\, AG \text{ (§ 42; 9)};$$

$$\therefore AC \,.\, AM = AF \,.\, AN;$$

$$AC : AF = AN : AM;$$

$$\therefore ACF \backsim ANM \text{ (§ 42; 3)}.$$

Also ist $\sphericalangle\, ACF = 90^0$.

Zieht man durch A eine beliebige andere Sekante, welche den Kreis in H und K schneidet, und es ist J der vierte harmonische Punkt derselben, so folgt aus dem Vorstehenden, dass $\sphericalangle ACJ = 90^0$ und FCJ eine Gerade ist.

Werden zwei Sekanten durch den Kreis und je einen inneren und einen äusseren Punkt harmonisch getheilt, und haben sie einen der letzteren Punkte gemein, so steht die Verbindungslinie der beiden übrigen auf der durch den gemeinschaftlichen Punkt gehenden Mittelpunktssekante senkrecht.

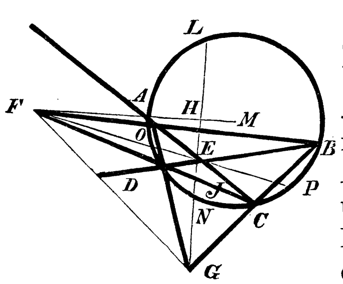
Anmerkung. Aus $AB \,.\, CD = BC \,.\, AD$ folgt:

$$BC \,.\, AD = BC \,.\, AC + BC \,.\, CD;$$

$$\therefore AB \,.\, CD + CB \,.\, CD + AB \,.\, AC = AB \,.\, AC + BC \,.\, AC;$$

$$AB \,.\, AD + CB \,.\, CD = AC^2.$$

Mit dieser Voraussetzung bildete der obige Satz einen Theil vom 7. Satze im zweiten Buche der „Ebenen Oerter" des Apollonius. Robert Simson verbesserte die darüber berichtende Stelle des Pappos (VII. Einl.) in diesem Sinne (im Jahre 1749) und bewies den Satz. — Apollonius ebene Oerter, wieder hergestellt von R. Simson, übersetzt von J. W. Camerer S. 322—327. — Der Sammlung des Pappos von Alex. 7. und 8. Buch; griechisch und deutsch von C. J. Gerhardt S. 27.



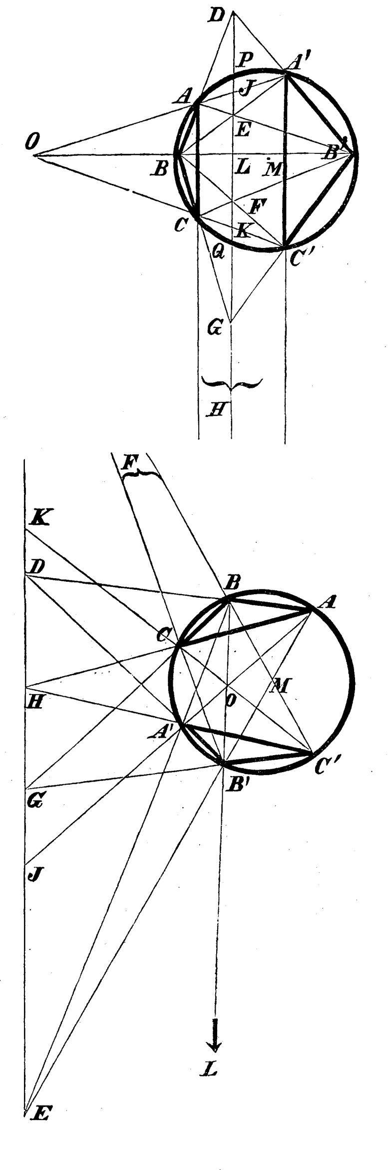
4. Auf dem Kreise um M liege das vollständige Kreisviereck $ABCD$. Von seinen Nebenecken befinde sich E, der Durchschnitt von AC und BD innerhalb, F, der Durchschnitt von AB und CD ausserhalb desselben, und G desgleichen. — Schneidet die Diagonale EG den Kreis in L und N, die Strecken AB und CD in H und J, so sind F, A, H, B und F, D, J, C je vier harmonische Punkte; HJ steht also senkrecht auf MF (3.). Aehnliches gilt für die beiden übrigen Diagonalen.

Die Gerade, welche den Mittelpunkt eines Kreises mit einer Nebenecke des vollständigen Kreisvierecks verbindet, steht auf der durch die beiden andern Nebenecken gehenden Diagonale senkrecht.

Zusatz. Die Diagonale EG geht durch die Berührungspunkte L, N, der von F aus, die Diagonale EF durch die Berührungspunkte O, P der von G aus an den Kreis gelegten Tangenten (2.).

Jede durch die innere Nebenecke eines vollständigen Kreisvierecks gehende Diagonale schneidet den Kreis in den Berührungspunkten der aus der dritten Nebenecke an den Kreis gelegten Tangenten.

5. Die Kreisdreiecke ABC und $A'B'C'$ liegen perspectivisch auf einem Strahlbüschel mit dem Collineationspunkte O. Ihre entsprechenden Seitenlinien AB und $A'B'$, BC und $B'C'$, CA und $C'A'$ treffen auf der Collineationsaxe in D, G, H zusammen (§ 52; 1). M ist der Mittelpunkt des Kreises. — Werden in dem vollständigen Vierecke ($AA'B'B$) die Seitenlinien AA', BB' von der Diagonale DE in J und L geschnitten, so sind O, A, J, A' und O, B, L, B' je vier harmonische Punkte (§ 50; 4. Zus.). Ebenso theilt in dem vollständigen Vierecke ($BB'C'C$) die Diagonale FG die Seitenlinien BB' und CC' harmonisch. Diese Diagonale schneidet also BB' in L; sie treffe CC' in K. Die Punkte J, L, K liegen demnach auf einer Geraden, welche auf MO senkrecht steht (3.). Die Gerade JK enthält aber auch die Punkte D und G; sie ist mithin die Collineationsaxe der Dreiecke ABC, $A'B'C'$.



Weil ferner die Geraden AB' und $A'B$, $B'C$ und BC' einander auf der Collineationsaxe DG schneiden, so ist für die nämliche Collineationsaxe

$ABC \barwedge A'B'C'$ und $AB'C \barwedge A'BC'$; die perspectivisch collinearen Dreiecke ABC und $A'B'C'$ liegen also involutorisch (§ 52; 5).

Zwei perspectivisch collineare Kreisdreiecke liegen involutorisch; ihre Collineationsaxe steht auf der Geraden senkrecht, welche durch den Collinationspunkt und den Kreismittelpunkt geht; dieselbe theilt mit dem Kreise und dem Collineationspunkte jeden Collineationsstrahl harmonisch.

Zusatz. Liegt der Collineationspunkt O ausserhalb des Kreises, und es schneidet die Collineationsaxe den Kreis in P und Q, so geht die Sehne PQ durch die Punkte J, K, L (2.); sie fällt also mit der Collineationsaxe zusammen.

Liegt der Collineationspunkt zweier perspectivischer Kreisdreiecke ausserhalb des Kreises, so fällt die Collineationsaxe mit der Geraden zusammen, welche die Berührungspunkte der aus dem Collineationspunkte an den Kreis gelegten Tangenten verbindet.

6. Es seien $ABCDE\,..$, $A'B'C'D'E'\,..$ zwei Kreisvielecke, welche auf einem Strahlbüschel mit dem Projectionspunkte O perspectivisch liegen. — Nun ist (5.)

$ABC \barwedge A'B'C'$; $BCD \barwedge B'C'D'$; $CDE \barwedge C'D'E'$ etc.

Die Collineationsaxe eines jeden Dreieckspaares theilt die Projectionsstrahlen AA', BB', CC', DD', EE' etc. in A_0, B_0, C_0, D_0, E_0 harmonisch; die Collineationsaxen $A_0B_0C_0$, $B_0C_0D_0$, $C_0D_0E_0$ etc. haben paarweise zwei Punkte gemein: sie fallen also in eine Gerade zusammen.

Die collinearen Dreieckspaare

$AB'C \barwedge A'BC'$; $BC'D \barwedge B'CD'$; $CD'E \barwedge C'DE'$ etc.

haben die Collineationsaxen mit den obigen Paaren gemein (5.); die Kreisvielecke $ABCDE\,..$, $A'B'C'D'E'\,..$ sind also collinear und liegen involutorisch.

Zwei perspectivisch auf einem Kreise liegende $n$ecke sind collinear und liegen involutorisch. Ihre Collineationsaxe theilt mit dem Kreise und dem Collineationspunkte jeden Collineationsstrahl harmonisch und steht auf dem durch den Mittelpunkt gehenden Strahle senkrecht.

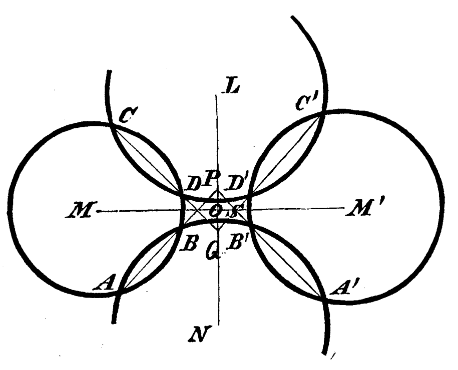
Zus. 1. Liegt der Collineationspunkt ausserhalb des Kreises, so wird dieser von der Collineationsaxe in den Berührungspunk-

ten der durch den Collineationspunkt gehenden Tangenten geschnitten (5. Zus.). Die in entsprechenden Punkten A und A', B und B' u. s. w. an den Kreis gelegten Tangenten treffen als entsprechende Linien ebenfalls auf der Collineationsaxe zusammen.

Zus. 2. Jeder Kreis kann mittels eines Strahlbüschels als ein involutorisches Gebilde mit zwei oder keinen Doppelpunkten dargestellt werden, je nachdem die Collineationsaxe ihn schneidet oder nicht.

Anmerk. Collineationspunkt und Collineationsaxe der Gebilde eines Kreises haben noch andere Namen erhalten. Servois nannte (Gergonne, Ann. de Math. I. [1810] p. 337) ersteren „Pol einer Geraden" (der Coll.-Axe), Gergonne (Ann. III. p. 297) letztere „Polare eines Punktes" (des Coll.-Punktes). Hiernach heisst z. B. die Berührungssehne der beiden von einem äusseren Punkte an einen Kreis gelegten Tangenten die Polare jenes Punktes, dieser Punkt der Pol der Sehne. J. Steiner gebrauchte für jenen Punkt und diese Gerade die Bezeichnungen: „harmonischer Pol der Geraden" und „Harmonische des Punktes". Syst. Entw. S. 163. — Vgl. Möbius: Baryc. Calcul § 272.

7. Die Kreise um M und M' werden von dem Kreise um N in A, B und A', B', von dem Kreise um L in C, D und C', D' geschnitten; AB und $A'B'$ treffen in P, CD und $C'D'$ in Q zusammen. — Nun ist (§ 42; 11)



$$PN^2 - AN^2 = PM^2 - AM^2 = PM'^2 - A'M'^2;$$
$$QL^2 - CL^2 = QM^2 - CM^2 = QM'^2 - C'M'^2;$$
$$\therefore PM^2 - PM'^2 = QM^2 - QM'^2 = AM^2 - A'M'^2.$$

Fällt man aus P eine Senkrechte PO auf MM', so hat man

$$PM^2 - OM^2 = PM'^2 - OM'^2;$$
$$\therefore PM^2 - PM'^2 = OM^2 - OM'^2 = AM^2 - A'M'^2;$$
$$\therefore OM^2 - AM^2 = OM'^2 - A'M'^2.$$

Es haben also die drei Punkte P, Q, O gleiche Potenzen in Bezug auf die Kreise um M und M'.

Ist S die Mitte von MM', so hat man (§ 43; 1)

$$PM^2 - PM'^2 = 2\ MM' \,.\, OS = AM^2 - A'M'^2;$$

$$\therefore\ OS = \frac{AM^2 - A'M'^2}{2\ MM'}.$$

Für den Abstand des Punktes S von dem Fusspunkte der aus Q auf MM' gefällten Senkrechten erhält man genau denselben Werth. P, Q und O liegen folglich auf einer Geraden, welche MM' rechtwinklig schneidet, und in welcher jeder Punkt gleiche Potenzen in Bezug auf die Kreise um M und M' hat.

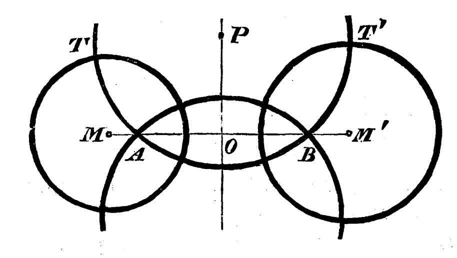
Werden zwei feste Kreise von einem beliebigen dritten geschnitten, so treffen die beiden gemeinschaftlichen Sekanten auf einer Geraden zusammen welche auf der Centralen der festen Kreise senkrecht steht, und in welcher jeder Punkt in Bezug auf letztere gleiche Potenzen hat.

Anmerk. Die Linie PQ wurde von J. Steiner 1826 die „Potenzlinie" der Kreise um M und M' genannt.

Zus. 1. Wenn zwei Kreise einander schneiden, so ist ihre gemeinschaftliche Sekante zugleich ihre Potenzlinie (§ 42; 11).

Schneidet also von drei Kreisen jeder die beiden andern, so treffen ihre drei gemeinschaftlichen Sekanten in einem Punkte zusammen.

Die Potenzlinie zweier Kreise, die einander berühren, geht durch ihren Berührungspunkt.



Zus. 2. Legt man von irgend einem Punkte P der Potenzlinie zweier Kreise aus an letztere die 4 Tangenten, so sind die Abstände der Berührungspunkte von P einander gleich. Es geht also durch die vier Berührungspunkte ein Kreis, der P zum Mittel-

punkte hat, und welcher ein Orthogonalkreis der beiden andern Kreise genannt wird.

Ist T ein Durchschnitt des Orthogonalkreises um P mit dem Kreise um M, so ist $\sphericalangle PTM = \frac{\pi}{2}$, also auch der Kreis M ein Orthogonalkreis des Kreises P.

Zus. 3. Liegt die Potenzlinie ganz ausserhalb der Kreise um M und M', und ist O der Durchschnitt von MM' mit der Potenzlinie, so hat man

$$PM^2 = PT^2 + MT^2 = PO^2 + MO^2.$$

Da aber nach Voraussetzung $MT < MO$.

$$\therefore PT > PO.$$

Der Orthogonalkreis um P schneidet also die Centrale MM'. Dies geschehe in A und B. Dann ist

$$OA = OB.$$

$$PT^2 = PM^2 - MT^2 = PO^2 + MO^2 - MT^2;$$

$$PT^2 = PA^2 = PO^2 + AO^2;$$

$$\therefore AO^2 = MO^2 - MT^2.$$

Es gehen demnach alle Orthogonalkreise der Kreise um M und M', deren Mittelpunkte auf PO liegen, durch die festen Punkte A und B.

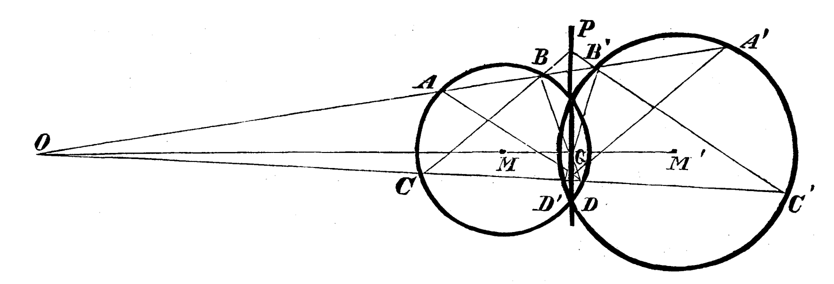
I. Alle Kreise, welche einen gegebenen Kreis orthogonal schneiden, und deren Mittelpunkte auf einer ausserhalb des gegebenen Kreises liegenden Geraden sich befinden, gehen durch einen Punkt der Senkrechten, welche vom Mittelpunkte des gegebenen Kreises auf die erwähnte Gerade gefällt wird.

Eine Umkehrung des vorstehenden Satzes enthielt der 7. Satz im zweiten Buche der „Ebenen Oerter" des Apollonius (Pappos: Samml. Gerhardt, S. 24); eine zweite Umkehrung bewies Pappos: VII; 159.

II. Wenn die Potenzlinie zweier festen Kreise ausserhalb derselben liegt, so schneiden alle gemeinschaftlichen Orthogonalkreise derselben die Centrale jener beiden Kreise in zwei festen Punkten.

J. Steiner: Crelle's Journ. I. (1826) S. 165.

8. Aus einem Aehnlichkeitspunkte O zweier Kreise um M und M' seien zwei Strahlen gezogen, welche die Kreise in A, B



und A', B', sowie in C, D und C', D' schneiden, und zwar so, dass $MA \parallel M'B'$ und $MC \parallel M'D'$ ist. — Nun ist

$$\left.\begin{aligned} OA \,.\, OB &= OC \,.\, OD; \\ OA' \,.\, OB' &= OC' \,.\, OD'. \end{aligned}\right\} \text{(§ 42; 9) I.}$$

$$OM : OM' = OA : OB' = OB : OA' = OC : OD' = OD : OC'.$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\; OA \,.\, OA' &= OB \,.\, OB'; \\ OA \,.\, OD' &= OB' \,.\, OC; \\ OA \,.\, OC' &= OB' \,.\, OD; \\ OB \,.\, OD' &= OA' \,.\, OC; \\ OB \,.\, OC' &= OA' \,.\, OD; \\ OC \,.\, OC' &= OD \,.\, OD'. \end{aligned}\right\} \text{II.}$$

Aus I. und II. ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} OA \,.\, OA' &= OC \,.\, OC'; \\ OB \,.\, OB' &= OD \,.\, OD'; \\ OA \,.\, OA' &= OD \,.\, OD'; \\ OB \,.\, OB' &= OC \,.\, OC'. \end{aligned}\right\} \text{III.}$$

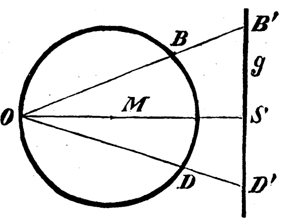
Durch die vier letzten Gleichungen (III.) sind vier Kreise, $AA'C'C$, $BB'DD'$, $AA'DD'$, $BB'C'C$ bestimmt (§ 42; 12), welche die Kreise um M und M' schneiden. Die gemeinschaftlichen Sekanten eines jeden von jenen vier Kreisen mit diesen beiden — AC und $A'C'$, BD und $B'D'$, AD und $A'D'$, BC und $B'C'$ — treffen also auf der Potenzlinie der Kreise um M und M' zusammen (7.), BC und $B'C'$ in P, BD und $B'D'$ in Q etc. Die entsprechenden Strecken, AC und $A'C'$ etc., sind aber im Allgemeinen nicht parallel: sie sind folglich collinear und ihre Collineationsaxe ist die Potenzlinie der Kreise um M und M'.

I. Jeder Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise ist

zugleich ein Collineationspunkt derselben, die Collineationsaxe fällt mit ihrer Potenzlinie zusammen, und auf jedem Collineationsstrahle sind die nicht ähnlich entsprechenden Punkte einander collinear entsprechend.

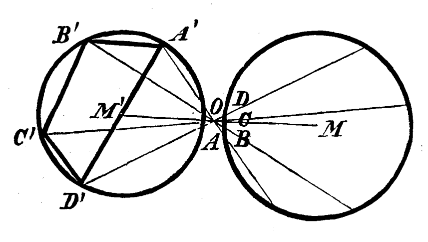
Vgl. J. Steiner: Geometr. Constructionen etc. (1833) § 17.

Anmerk. Die Collineationsaxe zweier Kreise nannte Gaultier 1812 (Journ. de l'École Polyt. XVI. p. 139) „Axe radical", Poncelet 1822 (Traité des propr. proj. 56) „sécante ou corde réelle et idéale", Plücker 1828 (Analyt.-geom. Entw. 93) „Chordale".



Wenn der Mittelpunkt M' des einen Kreises, der durch einen festen Punkt S der Centralen geht, sich unendlich weit entfernt, so rückt der Collineationspunkt O bis zum Kreise um M vor, weil die durch O gehende gemeinschaftliche Tangente beider Kreise dann auf der Centralen senkrecht steht. Der Kreis um M' streckt sich nämlich zu einer Geraden g, und diese kann mit einer Tangente des Kreises um M nur einen unendlich fernen Punkt gemein haben, ohne von ihr geschnitten zu werden. Von zwei entsprechenden Punkten eines Collineationsstrahls fällt nun der eine mit O zusammen, der andere ist unendlich fern, so dass nur noch zwei mit O endliche Strecken einschliessen, wie B und B', D und D' in der Figur. Dass durch die Punkte B, B', D', D ein Kreis geht, ist klar (§ 42; 14).

II. Ein Kreis und eine Gerade sind perspectivisch collinear für einen Collineationspunkt der auf dem Kreise liegt, wenn der durch diesen Punkt gehende Durchmesser auf der Geraden senkrecht steht; die Collineationsaxe fällt mit der Geraden zusammen.



9. Es sei O der Collineationspunkt zweier Kreise, welche von vier durch O gehenden Strahlen in den entsprechenden Punkten A und A', B und B', C und C', D und D' geschnitten werden. — Alsdann ist (8.)

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC' = OD \quad OD'.$$

$$\therefore OAB \backsim OB'A';\ OBC \backsim OC'B';\ OCD \backsim OD'C';\ ODA \backsim OA'D'$$

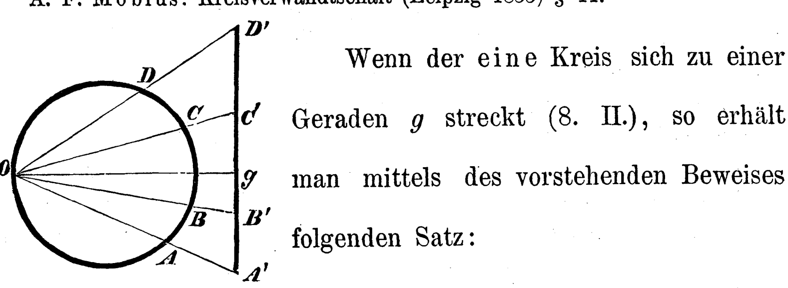
$$\therefore AB : OB = B'A' : OA';$$
$$OB : BC = OC' : C'B';$$
$$CD : OD = D'C' : OC';$$
$$OD : DA = OA' : A'D'.$$

Das Produkt dieser vier Gleichungen ist

$$(AB \cdot CD) = (B'A' \cdot D'C');$$
$$\therefore (AB \cdot CD) = (A'B' \cdot C'D').$$

I. In zwei collinearen Kreisvierecken sind die durch entsprechende Ecken bestimmten Doppelverhältnisse einander gleich.

A. F. Möbius: Kreisverwandtschaft (Leipzig 1855) § 11.



Wenn der eine Kreis sich zu einer Geraden g streckt (8. II.), so erhält man mittels des vorstehenden Beweises folgenden Satz:

II. Ein Strahlbüschel, dessen Projectionspunkt auf einem Kreise liegt, schneidet diesen Kreis und jede Gerade unter gleichen Doppelverhältnissen.

Zusatz. Fällt der Strahl OD mit der Tangente zusammen, die in O den Kreis berührt, und g parallel läuft, so hat man

$$(AB \cdot CO) = B'A' : B'C'.$$

Anmerk. A. F. Möbius nennt zwei Gebilde, $ABCD$.. und $A'B'C'D'$.. kreisverwandt, wenn dieselben auf einem Strahlbüschel mit dem Projectionspunkte O so liegen können, dass je zwei Paare entsprechender Punkte, A, A' und B, B' u. s w., sich auf einem Kreise befinden, oder, dass $OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$ .. ist. Beschreibt man um O einen Kreis k mit dem Radius $r = \sqrt{OA \cdot OA'}$, so entspricht jeder Punkt P desselben sich selbst, weil $OP^2 = OA \cdot OA'$ ist. Zu einem beliebigen Punkte E des ersten Gebildes erhält man den entsprechenden E' des zweiten, wenn man durch A, A' und E einen Kreis legt. Der Strahl OE schneidet denselben in E'. Nun liegt E' ausserhalb oder innerhalb des selbstentsprechenden Kreises k, je nachdem E innerhalb oder ausserhalb desselben angenommen wurde. Lässt man E mit O zusammenfallen, so rückt E' in die unendliche Ferne. In jedem Gebilde entspricht also O dem unendlich fernen Punkte des andern. O wird der Centralpunkt der kreisverwandten Gebilde genannt.

In zwei kreisverwandten Gebildea entspricht jedem nicht durch den Centralpunkt gehenden Kreise ein nicht durch diesen Punkt gehender Kreis (8. I.), jedem durch den Centralpunkt gehenden Kreise eine nicht durch diesen Punkt gehende Gerade (8. II.), jeder durch den Centralpunkt gehenden Geraden eine solche Gerade (Strahl).

A. F. Möbius: Kreisverwandtschaft § 6.

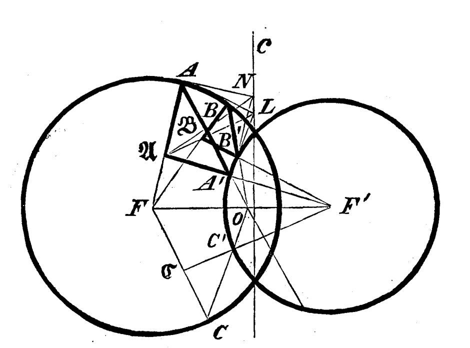
Wir wenden uns zu der Betrachtung derjenigen Strahlbüschel, deren Projectionspunkte die Mittelpunkte collinearer Kreise, und deren entsprechende Strahlen nach collinear entsprechenden Kreispunkten gerichtet sind. Diese Strahlbüschel sollen Centralbüschel, ihre Strahlen Centralstrahlen heissen.

§ 55.

Die Kegelschnitte.

1. Die Linien, auf denen sich die nach entsprechenden Punkten gerichteten Centralstrahlen zweier perspectivisch collinearer Kreise (§ 54; 8) schneiden, werden Kegelschnitte genannt. Die Mittelpunkte der beiden Kreise heissen die Brennpunkte (foci) der Kegelschnitte.

2. Es seien F und F' die Mittelpunkte zweier Kreise, O ihr Collineationspunkt, c die Collineationsaxe, A und A', B und B', C und C' je zwei entsprechende Punkte derselben. FA und $F'A'$ treffen in 𝔄, FB und $F'B'$ in 𝔅, FC und $F'C'$ in ℭ zusammen. — Nun sind 𝔄, 𝔅, ℭ Punkte des Kegelschnitts, der durch die beiden Kreise (nach 1.) bestimmt ist. Schneiden AB und $A'B'$ einander in L, so liegt dieser Punkt auf der Collineationsaxe c der beiden Kreise (§ 54; 8). Es sind jetzt die Dreiecke AA'𝔄 und BB'𝔅 perspectivisch collinear, weil je zwei entsprechende Seitenlinien derselben auf einer Geraden zusammen-

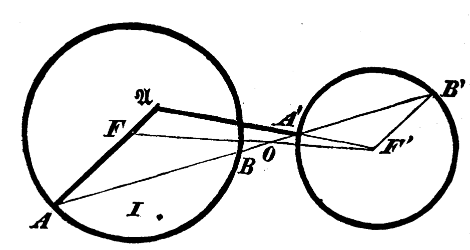


treffen, AA' und BB' in O, $A\mathfrak{A}$ und $B\mathfrak{B}$ in F, $A'\mathfrak{A}$ und $B'\mathfrak{B}$ in F' (§ 52; 2). Ihr Collineationspunkt ist aber L, da AB und $A'B'$ in diesem Punkte zusammentreffen. Auf gleiche Art lässt sich zeigen, dass auch AC, $A'C'$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$, sowie BC, $B'C'$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ auf der Collineationsaxe c zusammentreffen. Der durch die beiden Kreise bestimmte Kegelschnitt ist also perspectivisch collinear mit der Collineationsaxe c dem Kreise um F für den Collineationspunkt F, dem Kreise um F' für den Collineationspunkt F'.

Das Ergebniss lässt sich kurz so zusammenfassen:

Die aus den Mittelpunkten zweier perspectivisch collinearer Kreise nach entsprechenden Punkten derselben gehenden Strahlen treffen auf einem Kegelschnitte zusammen, welcher jedem der Kreise für seinen Mittelpunkt als Collineationspunkt perspectivisch collinear ist; die Collineationsaxe fällt mit der der beiden Kreise zusammen.

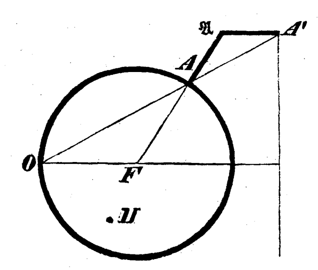
Zusatz. Zwei entsprechenden Sekanten oder Tangenten der Kreise entspricht eine Sekante oder Tangente des collinearen Kegelschnitts. Werden also die Kreise um F und F' in A und A' von zwei Tangenten berührt, die in N zusammentreffen, so berührt $N\mathfrak{A}$ den Kegelschnitt in $\mathfrak{A}$.



3. Es sei O der Collineationspunkt der Kreise um F und F' (I.). Ein Collineationsstrahl schneide den Kreis um F in A und B, den Kreis um F' in A' und B' so, dass $FA \parallel F'B'$, $FB \parallel F'A'$ ist. FA und $F'A'$ treffen in $\mathfrak{A}$ zusammen. — Da A und A' collinear entsprechende Punkte der Kreise sind, so ist $\mathfrak{A}$ ein Punkt des durch sie bestimmten Kegelschnitts (1.). Man hat nun

$$\sphericalangle\, FAA' = F'B'A' = B'A'F' = AA'\mathfrak{A};$$
$$\therefore\ \mathfrak{A}A = \mathfrak{A}A'.$$

Liegt F' unendlich fern (II.), so hat man



$$\sphericalangle AOF = FAO = \mathfrak{A}AA' = AA'\mathfrak{A};$$

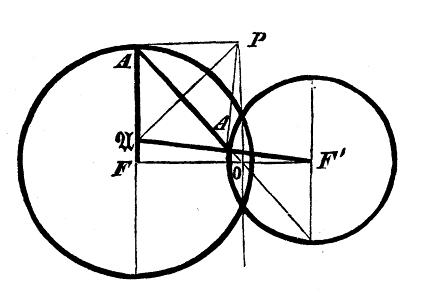
$$\therefore \mathfrak{A}A = \mathfrak{A}A'.$$

In zwei perspectivisch collinearen Kreisen sind je zwei entsprechende Punkte von dem ihnen entsprechenden Punkte des perspectivisch collinearen Kegelschnitts gleichweit entfernt.

Zusatz. Da $\mathfrak{A}A$ durch F, $\mathfrak{A}A'$ durch F' geht, so berührt der Kreis um $\mathfrak{A}$, auf welchem die Punkte A und A' liegen, die Kreise um F und F' in den gemeinschaftlichen Punkten. Die Berührung ist entweder gleichartig oder ungleichartig, je nachdem der Kreis um $\mathfrak{A}$ die beiden andern Kreise zugleich ein- oder ausschliesst, oder den einen ein- und den andern ausschliesst.

Die Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene Kreise, oder einen Kreis und eine Gerade, gleichartig oder ungleichartig berühren, liegen auf einem Kegelschnitte.

4. Es seien A und A' zwei entsprechende Punkte der collinearen Kreise um F und F'; $\mathfrak{A}$, der Durchschnitt von FA und $F'A'$, sei der ihnen entsprechende Punkt des collinearen Kegelschnitts. — Die in A und A' an die beiden Kreise gelegten Tangenten mögen in dem Punkte P der Collineationsaxe zusammentreffen. Dann ist $P\mathfrak{A}$ eine Tangente des Kegelschnitts, auf welchem die entsprechenden Centralstrahlen der beiden Kreise einander schneiden, und $\mathfrak{A}$ ihr Berührungspunkt. Nun hat man $\mathfrak{A}A = \mathfrak{A}A'$ (3.) und $PA = PA'$ (§ 54; 7. Zus. 2). Die Strecke AA' wird



daher von $P\mathfrak{A}$ senkrecht halbirt (§ 19; 6. Zus. 2), und es ist (§ 18; 4. Zus. 2.) $\sphericalangle\ P\mathfrak{A}A = P\mathfrak{A}A'$.

I. Der Abstand zweier entsprechender Punkte auf zwei perspectivisch collinearen Kreisen wird durch die an den collinearen Kegelschnitt in dem entsprechenden Punkte gelegte Tangente senkrecht halbirt.

II. Die Tangente eines Kegelschnitts bildet mit den von dem Berührungspunkte nach den Brennpunkten gehenden Geraden gleiche Winkel.

Apollonius: Kegelschnitte (Deutsch von H. Balsam. Berlin 1861.) III; § 48.

5. Mittels des unter Nr. 2 Festgestellten lässt sich eine Reihe von Sätzen, die für einen Kreis bewiesen wurden, auf die Kegelschnitte übertragen, indem jedem einem Kreise ein- oder umgeschriebenen Gebilde ein ein- oder umgeschriebenes Gebilde des collinearen Kegelschnitts entspricht, und umgekehrt. Man erhält so z. B. folgende Sätze:

I. Zwei Dreiecke sind perspectivisch collinear, wenn ihre entsprechenden Seitenlinien auf den gegenüber liegenden Seitenlinien eines einem Kegelschnitte eingeschriebenen Sechsecks liegen (§ 52; 13).

B. Pascal: Essais pour les coniques (1640).

II. Zwei Dreiecke sind perspectivisch collinear, wenn ihre entsprechenden Seitenlinien auf den gegenüber liegenden Seitenlinien eines einem Kegelschnitte umgeschriebenen Sechsecks liegen (§ 52; 14).

Brianchon: Journ. de l'École Polyt. Cah. XIII.

III. Zieht man von einem äusseren Punkte eine Sekante und zwei Tangenten nach einem Kegelschnitte, so wird die Sekante von dem Kegelschnitte und der Berührungssehne harmonisch getheilt (§ 54; 2).

Apollonius: Kegelschnitte III. § 37. — IV. §§ 1—4. 9—12.

IV. Zwei perspectivisch auf einem Kegelschnitte liegende $n$ecke sind collinear und liegen involutorisch. Ihre Collineationsaxe theilt mit dem Collineationspunkte und dem Kegelschnitte jeden Colli-

neationsstrahl harmonisch und steht auf dem durch den Brennpunkt gehenden Strahle senkrecht (§ 54; 6).

J. Steiner a. a. O. § 44. I.

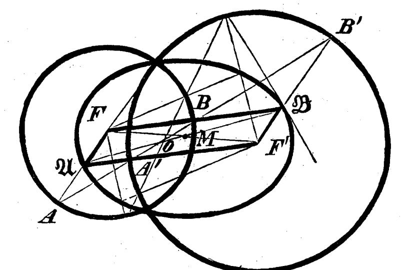
6. Durch die verschiedene Lage des Collineationspunktes zweier collinearen Kreise werden drei Hauptformen von Kegelschnitten bestimmt (1.). Man erhält nämlich

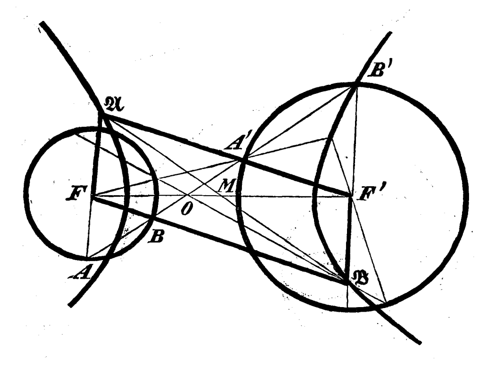
I. eine Ellipse, wenn der Collineationspunkt innerhalb,

II. eine Hyperbel, wenn er ausserhalb beider Kreise liegt;

III. eine Parabel, wenn er auf dem einen Kreise sich befindet und der andere (mit unendlich fernem Mittelpunkte) eine Gerade bildet.

Zusatz. Liegt der Collineationspunkt auf beiden collinearen Kreisen (in ihrem Berührungspunkte, § 54; 7. Zus. 1), so treffen die nach entsprechenden Punkten gerichteten Centralstrahlen nur in den Mittelpunkten zusammen; der Kegelschnitt ist alsdann auf seine Brennpunkte beschränkt.





7. Der Collineationspunkt O der beiden Kreise um F und F' liege entweder innerhalb oder ausserhalb beider Kreise. Durch O gehe ein Strahl, welcher den Kreis um F in A und B, den Kreis um F' in A' und B' so schneidet, dass A und A', sowie B und B' einander collinear entsprechen, mithin $FA \parallel F'B'$ und $FB \parallel F'A'$ ist. — Treffen nun FA und $F'A'$ in $\mathfrak{A}$, FB und $F'B'$ in $\mathfrak{B}$ zusammen, so sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Punkte einer Ellipse oder Hyperbel, je nachdem O innerhalb oder ausserhalb der beiden collinearen Kreise liegt.

Es ist nun $F\mathfrak{A}F'\mathfrak{B}$ ein Parallelogramm, in welchem FF' die eine, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ die andere Diagonale bildet. Der Punkt M, in welchem

diese Diagonalen einander halbiren, wird der **Mittelpunkt des Kegelschnitts** genannt.

Jeder Collineationsstrahl der beiden Kreise bestimmt also zwei Punkte des Kegelschnitts, welche von M gleichweit entfernt sind.

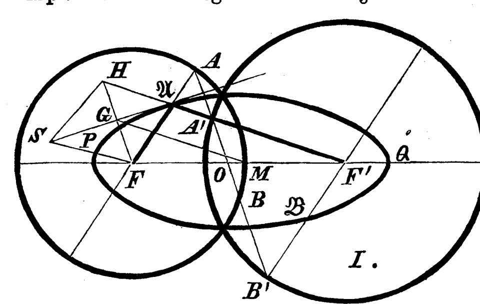
Jede Gerade, welche in einer Ellipse oder Hyperbel durch den Mittelpunkt der von den Brennpunkten begrenzten Strecke geht, trifft den Kegelschnitt entweder gar nicht oder in zwei Punkten, deren Abstand durch jenen Mittelpunkt halbirt wird.

Apollonius: Kegelschnitte I; § 30.

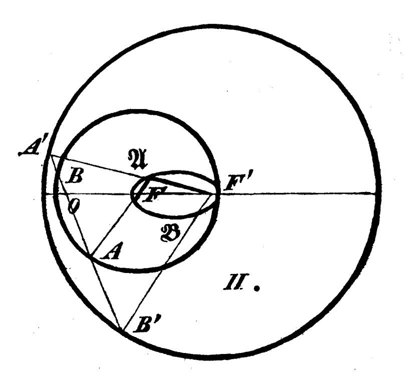
Zusatz. Die in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ an den Kegelschnitt gelegten Tangenten stehen auf dem Strahle OA senkrecht (4.), sind also parallel.

In einer Ellipse oder Hyperbel sind die Tangenten an je zwei Punkten parallel, deren Verbindungslinie durch den Mittelpunkt des Kegelschnitts geht.

Apollonius: Kegelschnitte II. § 27. 31.



8. Es seien F und F' die Mittelpunkte, r und r' die Radien zweier Kreise, welche ihren Collineationspunkt O einschliessen. Ein Collineationsstrahl schneide die Kreise in den entsprechenden Punkten A und A', B und B'. Die Centralstrahlen FA und $F'A'$ treffen in $\mathfrak{A}$ zusammen. — Nun ist $\mathfrak{A}$ ein Punkt der Ellipse (6.), auf welcher die entsprechenden Centralstrahlen einander schneiden. Ferner ist $F'A' = F'B'$, $\triangle\, \mathfrak{A}AA' \backsim F'B'A'$; $\therefore \mathfrak{A}A = \mathfrak{A}A'$.



Wenn nun O der innere Collineationspunkt beider Kreise ist, so hat man (Fig. I.):

$$\mathfrak{A}F + \mathfrak{A}F' = r - \mathfrak{A}A + r' + \mathfrak{A}A';$$
$$\therefore \mathfrak{A}F + \mathfrak{A}F' = r + r'.$$

Ist aber O der äussere Collineationspunkt, so ergiebt sich (Fig. II.):

$$\mathfrak{A}F' + \mathfrak{A}F = r' - \mathfrak{A}A' + \mathfrak{A}A - r;$$
$$\therefore \mathfrak{A}F' + \mathfrak{A}F = r' - r.$$

Die Summe der Abstände eines Punktes der Ellipse von den beiden Brennpunkten ist also der Summe oder dem Unterschiede der beiden Kreishalbmesser gleich; je nachdem der Collineationspunkt der innere oder äussere ist.

In einer Ellipse ist die Summe der Abstände eines jeden ihrer Punkte von den Brennpunkten eine beständige Grösse.

Apollonius: Kegelschnitte III; § 52.

Zus. 1. Bestimmt man auf der durch die Brennpunkte gehenden Geraden zwei Punkte, P und Q, so dass

$$PF + PF' = QF + QF' = \mathfrak{A}F + \mathfrak{A}F'$$

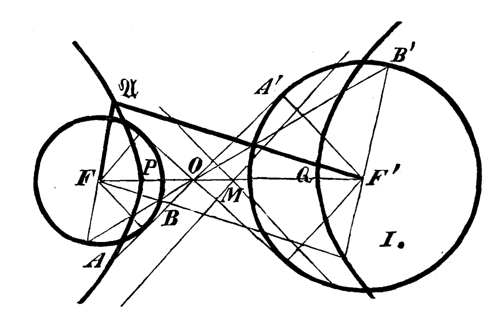
ist, so heisst die Strecke PQ die Hauptaxe der Ellipse.

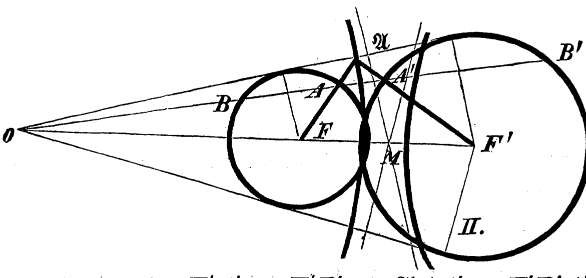
Alle um die festen Punkte F und F' beschriebenen Kreispaare bestimmen dieselbe Ellipse, wenn die Hauptaxe derselben unverändert bleibt, d. i., wenn bei einem inneren Collineationspunkte die Summe, bei einem äusseren der Unterschied der Radien sich nicht ändert.

Zus. 2. Der um $\mathfrak{A}$ mit dem Radius $\mathfrak{A}A$ beschriebene Kreis berührt von den Kreisen um F und F' den einen von innen, den andern von aussen (3. Zus.).

Die Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene, ihren Collineationspunkt einschliessende Kreise in den entsprechenden Punkten ungleichartig berühren, liegen auf einer Ellipse.

9. Es seien F und F' die Mittelpunkte, r und r' die Radien zweier Kreise, welche ihren Collineationspunkt O aus-





schliessen. Ein Collineationsstrahl schneide die Kreise in den entsprechenden Punkten A und A', B und B'. Die Centralstrahlen FA und $F'A'$ treffen in $\mathfrak{A}$ zusammen. — Es ist nun $\mathfrak{A}$ ein Punkt der Hyperbel (6.), auf welcher die entsprechenden Centralstrahlen einander schneiden. Ferner ist $F'A' = F'B'$, $\triangle\, \mathfrak{A}AA' \backsim F'B'A'$; $\therefore\, \mathfrak{A}A = \mathfrak{A}A'$.

Wenn nun O der innere Collineationspunkt beider Kreise ist, so hat man (Fig. I.)

$$\mathfrak{A}F' - \mathfrak{A}F = \mathfrak{A}A' + r' - \mathfrak{A}A + r;$$
$$\therefore\, \mathfrak{A}F' - \mathfrak{A}F = r' + r.$$

Ist aber O der äussere Collineationspunkt, so ergiebt sich (Fig. II.):

$$\mathfrak{A}F' - \mathfrak{A}F = \mathfrak{A}A' + r' - \mathfrak{A}A - r;$$
$$\therefore\, \mathfrak{A}F' - \mathfrak{A}F = r - r'.$$

Die Differenz der Abstände eines Punktes der Hyperbel von den Brennpunkten ist also der Summe oder dem Unterschiede der Kreishalbmesser gleich, je nachdem der Collineationspunkt der innere oder äussere ist.

In einer Hyperbel ist die Differenz der Abstände eines jeden ihrer Punkte von den Brennpunkten eine beständige Grösse.

Apollonius: Kegelschnitte III; § 51.

Zus. 1. Bestimmt man auf der Geraden FF' zwei Punkte, P und Q, so dass

$$PF' - PF = QF - QF' = \mathfrak{A}F' - \mathfrak{A}F$$

ist, so heisst die Strecke PQ die Hauptaxe der Hyperbel.

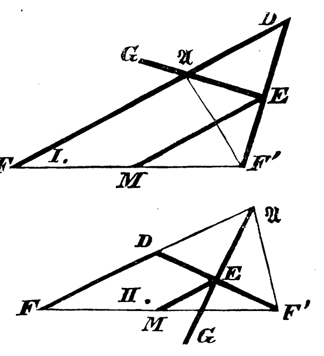
Alle um die festen Punkte F und F' beschriebenen Kreispaare bestimmen dieselbe Hyperbel, wenn die grosse Axe derselben unverändert bleibt, d. i., wenn bei einem inneren Collineationspunkte die Summe, bei einem äusseren die Differenz der beiden Radien denselben Werth beibehält.

Zus. 2. Der um $\mathfrak{A}$ mit dem Radius $\mathfrak{A}A$ beschriebene Kreis berührt die Kreise um F und F' bei einem inneren Collineationspunkte ungleichartig, bei einem äusseren gleichartig.

Die Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene, ihren Collineationspunkt ausschliessende Kreise in entsprechenden Punkten berühren, liegen auf einer Hyperbel. Die Berührung ist bei einem inneren Collineationspunkte ungleichartig, bei einem äusseren gleichartig.

Zus. 3. Auf den Collineationsstrahlen, welche die Kreise um F und F' berühren, entsprechen einander die Berührungspunkte. Die nach diesen gerichteten Centralstrahlen sind aber parallel, daher bestimmen sie zwei unendlich ferne Punkte der Hyperbel. Die beiden durch den Mittelpunkt M der Hyperbel gezogenen Geraden, welche den nach den Berührungspunkten gehenden Centralstrahlen parallel laufen, sind nach den unendlich fernen Punkten der Hyperbel gerichtet und heissen die Asymptoten derselben. Die Hyperbel besteht demnach aus zwei getrennten Linienzügen, die innerhalb zweier Scheitelwinkel der Asymptoten liegen und von denen jeder nach zwei — durch die Asymptoten bestimmten — Richtungen ins Unendliche verläuft.

10. Der Werth der Hauptaxe einer Ellipse oder Hyperbel, mit den Brennpunkten F und F', und dem Mittelpunkte M, werde durch $2a$ bezeichnet. Es liege nun ein Punkt D so, dass $DF = 2a$ ist. Auf der Strecke DF' sei in ihrer Mitte E eine Senkrechte errichtet, welche die Gerade DF in $\mathfrak{A}$ schneidet. — Es ist dann $\mathfrak{A}D = \mathfrak{A}F'$.



Liegt $\mathfrak{A}$ auf der Strecke DF selbst (Fig. I.), so hat man

$$\mathfrak{A}F + \mathfrak{A}D = \mathfrak{A}F + \mathfrak{A}F' = 2a.$$

Es ist also $\mathfrak{A}$ ein Punkt der Ellipse (8) und $\mathfrak{A}E$ eine Tangente derselben, welche sie in $\mathfrak{A}$ berührt (4).

Wenn aber $\mathfrak{A}$ sich auf der Verlängerung der Strecke DF befindet (Fig. II.), so ergiebt sich

$$\mathfrak{A}F - \mathfrak{A}D = \mathfrak{A}F - \mathfrak{A}F' = 2\,a.$$

Es ist daher in diesem Falle $\mathfrak{A}$ ein Punkt der Hyperbel (9.), welche in demselben von der Tangente $\mathfrak{A}E$ berührt wird.

Wenn die beiden Brennpunkte einer Ellipse oder Hyperbel mit einem dritten Punkte durch zwei Strecken verbunden sind, von denen die eine der Hauptaxe gleich ist, so bildet die auf der andern in ihrer Mitte errichtete Senkrechte eine Tangente des Kegelschnitts; und umgekehrt: wenn die eine Verbindungslinie durch eine Tangente senkrecht halbirt wird, so ist die andere der Hauptaxe des Kegelschnitts gleich.

J. Newton: Philos. nat. princip. mathem. (1714), lib. I. lemma 15.

Zus. 1. Es ist $MF' : FF' = ME : FD = 1 : 2$;

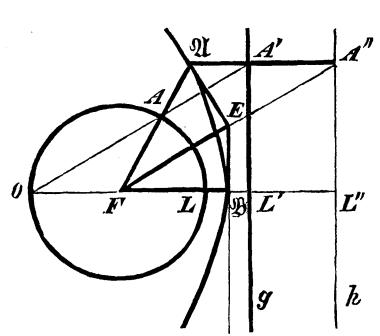
$$\therefore\ ME = a.$$

Die Fusspunkte aller Senkrechten, die von den Brennpunkten einer Ellipse oder Hyperbel auf die Tangenten dieser Linien gefällt werden können, liegen auf einem Kreise, welcher um den Mittelpunkt des Kegelschnitts mit der halben Hauptaxe beschrieben wird.

Zus. 2. Wenn G ein beliebiger Punkt auf der Tangente einer Ellipse oder Hyperbel ist, so hat man $GF' = GD$. Der um F mit dem Radius $2\,a$ beschriebene Kreis schneidet also den um G mit dem Radius GF' beschriebenen in D.

Beschreibt man um einen Brennpunkt einer Ellipse oder Hyperbel mit der Hauptaxe einen Kreis, und um einen gegebenen Punkt G mit seinem Abstande von dem andern Brennpunkte einen zweiten Kreis, so werden die Verbindungslinien der Durchschnittspunkte beider Kreise mit dem letzteren Brennpunkte von den durch den gegebenen Punkt gehenden Tangenten des Kegelschnitts senkrecht halbirt.

11. Es sei O der Collineationspunkt des Kreises um F und der Geraden g, welche auf dem Durchmesser OL in L' senkrecht steht. Ein Collineationsstrahl schneide Kreis und Gerade in den entsprechenden Punkten A und A'. Die in A' auf g errichtete Senkrechte treffe mit dem Centralstrahle FA in $\mathfrak{A}$ zusammen. — Nun ist $\mathfrak{A}$ ein Punkt der durch den Kreis und die Gerade g bestimmten Parabel (6.). Ebenso dient jeder Collineationsstrahl zur Bestimmung eines Parabelpunktes. Der Collineationsstrahl aber, welcher den Kreis in O berührt, trifft die Gerade g nicht, daher liegt auf dem Centralstrahle FO kein Parabelpunkt mehr. Nun ist



$$\triangle\ FOA \backsim \mathfrak{A}A'A;\ \therefore\ \mathfrak{A}A' = \mathfrak{A}A.$$

Der um $\mathfrak{A}$ mit dem Radius $\mathfrak{A}A$ beschriebene Kreis berührt mithin den Kreis und die Gerade g.

Die Mittelpunkte aller Kreise, welche einen Kreis und eine Gerade berühren, liegen auf einer Parabel.

Zus. 1. Verlängert man OL' um $L'L'' = OF$, und zieht durch L'' eine Parallele h zu g, welche von $\mathfrak{A}A'$ in AA'' geschnitten wird, so ist

$$A'A'' = L'L'' = FA;$$
$$\therefore\ \mathfrak{A}A + AF = \mathfrak{A}A' + A'A'';$$
$$\mathfrak{A}F = \mathfrak{A}A''.$$

Alle Punkte, welche von einem gegebenen Punkte F und von einer gegebenen Geraden gleichweit entfernt sind, liegen auf einer Parabel, deren Brennpunkt der gegebene Punkt ist.

Die Linie h heisst die Leitlinie oder Directrix der Parabel.

12. Es sei E die Mitte von FA'' und $\mathfrak{B}$ die Mitte von FL''

oder LL'. — In dem gleichschenkligen Dreiecke $\mathfrak{A}FA''$ halbirt nun $\mathfrak{A}E$ den Winkel $F\mathfrak{A}A''$; die Gerade $\mathfrak{A}E$ berührt also die Parabel in $\mathfrak{A}$, und es ist $\sphericalangle\ FE\mathfrak{A} = \frac{\pi}{2}$. — Es ist ferner $\mathfrak{B}$ ein Punkt der Parabel, welcher auf ihrer Axe OF liegt und ihr Scheitel genannt wird. Weil $F\mathfrak{B}E \backsim FL''A''$ ist, so hat man $\sphericalangle\ F\mathfrak{B}E = \frac{\pi}{2}$.

Nun ist $F\mathfrak{B}E \backsim FE\mathfrak{A}$; $\therefore\ F\mathfrak{B} : FE = FE : F\mathfrak{A}$;

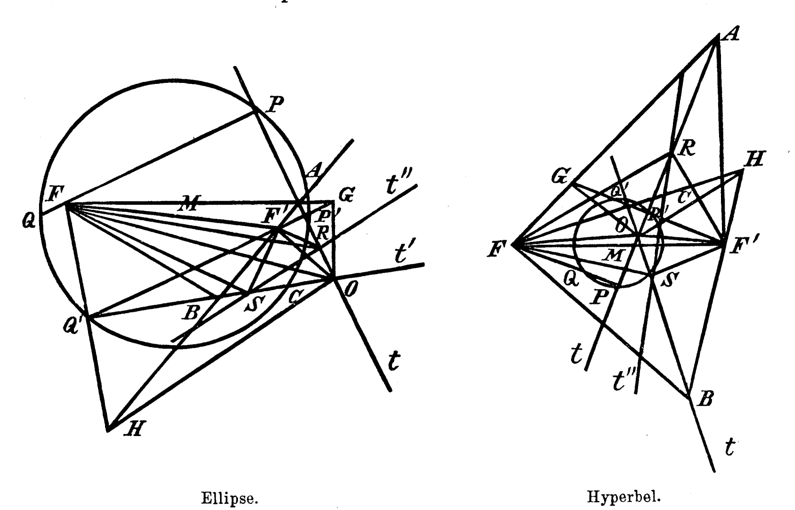
$$\therefore\ FE^2 = F\mathfrak{B} \,.\, F\mathfrak{A}.$$

Die Senkrechte, welche vom Brennpunkte einer Parabel aus auf eine Tangente gefällt wird, bildet die mittlere Proportionale zwischen den Abständen des Brennpunktes vom Berührungspunkte und vom Scheitel des Kegelschnitts.

Zus. 1. Es ist $F\mathfrak{A}^2 : FE^2 = F\mathfrak{A} : F\mathfrak{B}$.

Zus. 2. Die Fusspunkte aller Senkrechten, welche vom Brennpunkte einer Parabel auf die Tangenten derselben gefällt werden können, liegen auf der Scheiteltangente der Parabel.

Is. Newton: Phil. nat. princ. math. lib. I. lemmà 14.



Ellipse. Hyperbel.

13. Es seien A, B, C Punkte eines Kegelschnittes, der die

Brennpunkte F und F', den Mittelpunkt M und die Hauptaxe $2a$ hat. Die in A und B den Kegelschnitt berührenden Tangenten t und t' treffen in O zusammen. Auf die Tangente t sind aus F und F' die Senkrechten FP und $F'P'$ gefällt. — Wenn $F'P'$ mit FA in G zusammentrifft, $F'B$ in H die aus F auf t' gefällte Senkrechte schneidet, so ist $OF' = OG$ und $BF = BH$. Es liegen P und P' auf dem Kreise, welcher mit der halben Hauptaxe a als Radius um M beschrieben wird (10. Zus. 1.). Schneiden PF und $P'F'$ diesen Kreis zum zweiten Male in Q und Q', so ist $FQ = P'F'$ und $PF = F'Q'$, mithin

$$QF \,.\, FP = FP \,.\, F'P'.$$

In der Ellipse und in der Hyperbel ist das Längenprodukt aus den beiden von den Brennpunkten auf eine Tangente gefällten Senkrechten gleich der negativen Potenz jedes Brennpunktes in Bezug auf den Kreis, auf welchem die Fusspunkte jener Senkrechten liegen; und zwar ist das Längenprodukt in der Ellipse positiv, in der Hyperbel negativ.

Ph. De la Hire: Sectiones conicae (Parisiis. 1685) VIII; 7.

14. Nach der obigen Construction ist $FG = F'H = 2a$, $OF = OH$, $OG = OF'$, mithin hat man

$$OFG \cong OHF';$$
$$OHB \cong OFB;\; OGA \cong OF'A$$
$$\therefore \sphericalangle\, OFA = OFB;\; OF'A = OF'B.$$

Wenn man in einem Kegelschnitte einen Brennpunkt mit den beiden Berührungspunkten und dem Durchschnittspunkte zweier Tangenten durch Gerade verbindet, so halbirt die letztere Verbindungslinie den Winkel der beiden ersteren.

De la Hire a. a. O. VIII; 24.

15. In C werde der Kegelschnitt von der Tangente t'' berührt, welche t in R, t' in S schneidet. — Dann ist

$$\sphericalangle\, RFA = RFC;\; SFB = SFC \text{ (14.)}$$
$$\therefore \sphericalangle\, RFA + SFB = RFS$$
$$\sphericalangle\, RFS = \tfrac{1}{2}\, AFB = OFA = OFB.$$

Ebenso findet man

$$\sphericalangle\ RF'S = \tfrac{1}{2}\ AF'B = OF'A = OF'B.$$

In einem Kegelschnitte liegen allen Strecken, die auf beliebig vielen Tangenten von zwei festen Tangenten begrenzt werden, an einem Brennpunkte gleiche Winkel gegenüber.

Poncelet: Traité des propr. proj. (Paris 1822) 464.

Zusatz. In dem einem Kegelschnitte umgeschriebenen Dreiecke ist der Winkel, welcher an einem Brennpunkte einer Seitenstrecke gegenüber liegt, halb so gross wie der Winkel am Brennpunkte, welcher auf dem von den Berührungspunkten der beiden andern Seitenstrecken begrenzten und den dritten Berührungspunkt einschliessenden Bogen steht (Vgl. § 27; 1).

16. Da $\sphericalangle\ AFO = RFS$ und $\sphericalangle\ OFB = RFS$ ist (15.), so ist

$$\sphericalangle\ AFR = OFS;\ RFO = SFB,$$

mithin sind die schief liegenden Strahlbüschel $F(ARO)$ und $F(OSB)$ congruent. Ebenso ist $F'(ARO) \cong F'(OSB)$.

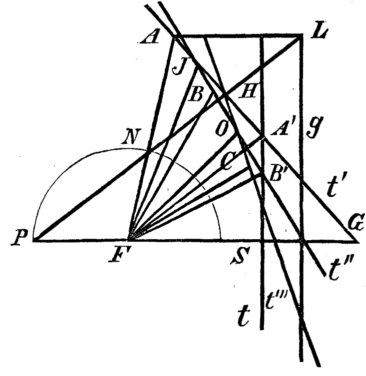
I. In einem Kegelschnitte ist jeder Brennpunkt der gemeinschaftliche Projectionspunkt von zwei congruenten Strahlbüscheln in schiefer Lage, deren entsprechende Strahlen durch die Punkte gehen, in denen zwei feste Tangenten von allen übrigen Tangenten geschnitten werden; den vereinigten Strahlen (FO, $F'O$) entsprechen die nach den wechselseitigen Berührungspunkten gerichteten.

Hieraus folgt, da alle Geraden von congruenten Strahlbüscheln in collinearen Punktreihen geschnitten werden:

II. Zwei feste Tangenten eines Kegelschnitts werden von den übrigen Tangenten in entsprechenden Punkten collinearer Punktreihen geschnitten, und zwar entsprechen den in ihrem Durchschnitte vereinigten Punkten die gegenseitigen Berührungspunkte.

J. Steiner: System. Entw. S. 139.

17. Die vorstehenden Sätze werden für die **Parabel** auf folgende Art abgeändert.



Es seien der um F mit dem Radius PF beschriebene Kreis und die Gerade g in Bezug auf den Collineationspunkt P perspectivisch collinear. Ein von P ausgehender Strahl schneide den Kreis in N, die Gerade g in L. Durch L und N ist der Punkt A einer Parabel bestimmt, die den Scheitel S hat. Eine Tangente t', welche die Parabel in A berührt, schneide die Axe FS in G. — Dann ist

$$\sphericalangle\, FAG = GAL = AGF;$$
$$\therefore\; FA = FG.$$

I. **In einer Parabel schneidet jede Tangente die Axe in einem Abstande vom Brennpunkte, welcher dem Abstande des letzteren vom Berührungspunkte gleich ist.**

Wird die Scheiteltangente t von t' in A', von der in B die Parabel berührenden Tangente t'' in B' geschnitten, so hat man, da FA' den Winkel AFS, FB' den Winkel BFS halbirt (12. Zus. 2):

$$FAA' \backsim FA'S;\; FBB' \backsim FB'S.$$

Schneiden einander die Tangenten t' und t'' in J, so liegen die vier Punkte F, J, A', B' auf einem Kreise, dessen Durchmesser FJ ist. Daher ist

$$\sphericalangle\, B'FA' = B'JA', \text{ und } FJA' = FB'S = FBB';$$
$$\therefore\; \sphericalangle\, JFA' = BFB';\; JFB = A'FB'$$
$$\sphericalangle\, FAA' = \tfrac{1}{2}\, AFP;\; FBB' = \tfrac{1}{2}\, BFP$$
$$\therefore\; \sphericalangle\, FBB' - FAA' = \tfrac{1}{2}\, BFA;$$
$$\sphericalangle\, FBB' - FAA' = A'FA - B'FB = BFA - B'FA' = JFA$$
$$\therefore\; \sphericalangle\, BFJ = JFA \text{ (Vgl. 14.)};\; \triangle\, BFJ \backsim JFA.$$

II. **Verbindet man den Brennpunkt einer Parabel mit dem Durchschnitte zweier Tangenten und ihren Berührungspunkten, so schliessen je zwei auf einander folgende Verbindungslinien mit den Tangentenstrecken ähnliche Dreiecke ein.**

Wird die Tangente t''', welche in C die Parabel berührt, von t' und t'' in H und O geschnitten, so ist

$$\sphericalangle\, AFJ = JFB;\ \sphericalangle\, OFC = BFO;$$
$$\therefore \sphericalangle\, AFJ + OFC = JFO$$
$$\therefore \sphericalangle\, JFO = \tfrac{1}{2}\, AFC = AFH = HFC;\ \sphericalangle\, JFH = BFO$$
$$\therefore AFH \backsim HFC;\ JFH \backsim BFO \backsim OFC;$$
$$\therefore FH : FC = AH : HC = JH : OC.$$

III. Die von dem Durchschnitte und den Berührungspunkten begrenzten Strecken zweier Tangenten einer Parabel werden von den übrigen Tangenten unter ähnlichen Punktreihen geschnitten.

J. H. Lambert: Insigniores orbitae cometarum proprietates (Aug. Vindelic. 1761) p. 1—7.

Zweites Buch.

Trigonometrie.

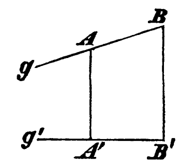
Erstes Hauptstück:

Allgemeine Goniometrie.

§ 1.

Die Winkelfunctionen.

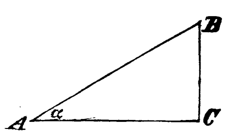
1. Wenn man von einem Punkte A einer Geraden g eine Senkrechte AA' auf eine beliebige andere Gerade g' fällt, so heisst A der projicirte Punkt, AA' die projicirende Gerade (Projicirende), A' die Projection von A.



Projicirt man einen zweiten Punkt B der Geraden g mittels der Projicirenden BB' auf g', so dass B' die Projection von B ist, dann wird AB die projicirte Strecke (Projicirte), $A'B'$ ihre Projection und die Gerade g' die Projectionsaxe genannt.

K. D. v. Münchow: Grundlinien der ebenen und sphär. Trigonometrie (Bonn, 1826) 2.

2. Schneidet man auf einem Schenkel eines Winkels α vom Scheitel A aus eine Strecke AB ab und fällt von B eine Senkrechte BC auf den andern Winkelschenkel, so ist AC die Projection der Projicirten AB, und BC die einzige zur Bildung der Projection erforderliche Projicirende.

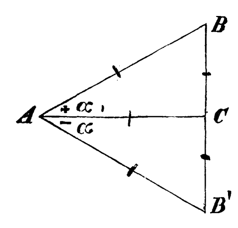


Behält nun der Schenkel, welcher mit der Projectionsaxe zusammenfällt, mit dieser eine feste Lage, während der andere Schenkel mit der Projicirten sich um den Scheitel dreht und nach und nach mit jenem alle Winkel von 0^0 bis 360^0 bildet, so ergiebt sich, dass die Projicirenden bei allen Winkeln von 0^0 bis 180^0 auf der einen, von 180^0 bis 360^0 auf der andern Seite der Projectionsaxe, die Projectionen bei den Winkeln von 0^0 bis 90^0 und von 270^0 bis 360^0 auf dem festen Winkelschenkel, von 90^0 bis 270^0 auf seiner Verlängerung liegen. Projicirende und Projectionen haben also für alle diese Winkel nur zwei entgegengesetzte Richtungen: erstere von der Projectionsaxe aus und senkrecht zu derselben; letztere vom Scheitel aus auf der Projectionsaxe.

Man betrachtet nun die eine dieser Richtungen, welche beim spitzen Winkel vorkommt, als positiv, die entgegengesetzte als negativ, so dass die *Projicirende* von 0^0 bis 180^0 als *positiv*, von 180^0 bis 360^0 als *negativ*, die *Projection* von 0^0 bis 90^0 und von 270^0 bis 360^0 als *positiv*, von 90^0 bis 270^0 als *negativ gilt*.

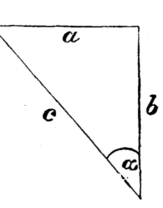
Die Projicirte, welche nach allen in einer Ebene möglichen Richtungen sich erstrecken kann, wird stets als positiv angesehen.

3. Wenn n eine ganze Zahl ist, so fallen alle Winkel, die um $n . 360^0$ oder $2 n \pi$ von einander verschieden sind, in der Construction ununterscheidbar zusammen, wofern sie den Scheitel nebst einem Schenkel gemein haben und im Drehungssinne übereinstimmen. Solche Winkel haben daher, bei vorhandener Gleichheit der Projicirten, gleiche Projicirende und Projectionen.



4. Zwei Winkel, deren numerische Werthe einander gleich, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen versehen sind, insofern sie durch Drehungen in entgegengesetztem Sinne erzeugt wurden, wie $CAB = \alpha$ und $CAB' = -\alpha$, haben unter Voraussetzung gleicher Projicirten gleiche Projectionen, aber entgegengesetzt gleiche Projicirende. Denn es fallen die Fusspunkte der Projicirenden in C zusammen, so dass $BC = B'C$ ist.

5. Wenn man auf einem Schenkel des Winkels α vom Scheitel aus eine Strecke c abschneidet, dieselbe mittels der



Projicirenden a auf den andern Schenkel projicirt und so die Projection b bildet, so werden die Quotienten je zweier Seitenstrecken des aus c, a und b zusammengesetzten rechtwinklichen Dreiecks — des „Projectionsdreiecks" des Winkels α — Winkelfunctionen (trigonometrische Functionen) von α genannt, und zwar heisst der Quotient

I. der Projicirenden durch die Projicirte der Sinus des Winkels α, abgekürzt

$$\frac{a}{c} = sin\ \alpha;$$

II. der Projection durch die Projicirte der Cosinus (= complementi sinus) des Winkels α, abgekürzt

$$\frac{b}{c} = cos\ \alpha;$$

III. der Projicirenden durch die Projection der Tangens des Winkels α, abgekürzt

$$\frac{a}{b} = tg\ \alpha;$$

IV. der Projection durch die Projicirende der Cotangens (= complementi tangens) des Winkels α, abgekürzt

$$\frac{b}{a} = cotg\ \alpha;$$

V. der Projicirten durch die Projection der Secans des Winkels α, abgekürzt

$$\frac{c}{b} = sec\ \alpha;$$

VI. der Projicirten durch die Projicirende der Cosecans (= complementi secans) des Winkels α, abgekürzt

$$\frac{c}{a} = cosec\ \alpha.$$

Die Winkelfunctionen $sin\,\alpha$, $tg\,\alpha$ und $sec\,\alpha$ nennt man Hauptfunctionen, die drei übrigen $cos\,\alpha$, $cotg\,\alpha$ und $cosec\,\alpha$ Cofunctionen des Winkels α. Letztere sind, was auch ihre Namen andeuten, die Hauptfunctionen des Complementwinkels von α.

Anmerk. 1. In älteren Büchern werden noch die Bezeichungen *sinus versus* (*sinv*) und *cosinus versus* (*cosv*) gebraucht in der Bedeutung $sinv\ \alpha = 1 - cos\,\alpha$, $cosv\,\alpha = 1 - sin\,\alpha$.

G. S. Klügel: Analytische Trigonometrie (Braunschweig 1770) 1; 3. 4. Die kurze Bezeichnungsart $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ etc. führte L. Euler ein: Introd. in Analysin inf. (1748) I. 127.

Anmerk. 2. Die Trigonometrie entwickelt den Zusammenhang zwischen den Winkeln, Strecken und Flächen eines Gebildes mittels der Winkelfunctionen. Die Lehre vom Zusammenhange der Winkelfunctionen und Winkel wird Goniometrie genannt.

6. Bei unveränderter Grösse der Projicirten und stetig sich vergrösserndem Winkel wächst die Projicirende von 0 — bei 0° — bis zu ihrem grössten positiven Werthe — bei 90° —, nimmt dann ab bis zu ihrem grössten negativen Werthe — bei 270° —, und erreicht wieder den Werth 0 bei 360°; die Projection nimmt ab von ihrem grössten positiven Werthe — bei 0° — an bis zu ihrem grössten negativen Werthe — bei 180° —, und erreicht stetig wachsend wieder ihren ersteren Werth bei 360°. Die Projicirte fällt bei 0°, 180° und 360° mit der Projection, bei 90° und 270° mit der Projicirenden in allen Punkten zusammen, daher ist

für $\alpha =$	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1

Der Werth einer Winkelfunction für irgend einen in der vorstehenden Tabelle nicht aufgeführten Winkel zwischen 0° und 360° liegt zwischen den Werthen, welche für die ihn einschliessenden Winkel angegeben sind. Ueberhaupt liegen alle Werthe von

$\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ zwischen $+1$ und -1.

•7. Die Werthe der Winkelfunctionen einzelner Winkel erhält man leicht mittels der Sätze des § 46 im ersten Buche. Z. B. $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$; $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $tg\, 30^\circ = cotg\, 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};\ tg\, 45^\circ = cotg\, 45^\circ = 1.$$

$\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$; $\cos 18^\circ = \sin 72^\circ = \frac{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$ (erstes Buch § 46; 2—4).



Kennt man den $\sin\alpha$, so lässt sich leicht, mit Hülfe von § 46; 7 im ersten Buche, $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\alpha}{4}$ u. s. w. berechnen.

Anmerk. Die ältesten Anfänge der Trigonometrie, welche auf uns gekommen sind, finden sich in dem Almagest (σύνταξις μαθηματικὴ) des Claudius Ptolemäus (69—147 n. Chr.). In dem ersten Buche dieses Werkes hat nämlich Ptolemäus die Sehnen eines Kreises für die Winkel von 0° — 180° mit Unterschieden von halben Graden in Theilen des Halbmessers ausgedrückt und auch den Weg der Berechnung angegeben. Theon, der alte Erklärer des Almagest, bemerkt jedoch, dass bereits Hipparch (166—125 v. Chr.) und Menelaos (um 100 n. Chr.) den Gebrauch der Sehnen vor Ptolemäus gelehrt, dieser aber die Berechnung derselben auf wenige Lehrsätze zurückgeführt habe.

Der Araber Mohammed Ebn Geber (gest. 929 n. Chr.), Statthalter der Khalifen in Syrien, nach seinem Geburtsorte Batan in Mesopotamien Albatani (Albatenius) genannt, führte zur Abkürzung der Rechnung die Anwendung der halben statt der ganzen Sehnen ein. Die vollständige Sehnentafel wurde dadurch auf einen Viertelkreis beschränkt. Der Quotient der halben dem Centriwinkel 2α zugehörigen Sehne durch den Radius ist aber $\sin\alpha$.

Die halbe Sehne wurde von dem Araber Geber ben Afflah aus Sevilla (um 1090 n. Chr.) in seinen „Neun Büchern über Astronomie" dschaib — in der Bedeutung von sectio — genannt. In der durch Gerhard von Cremona um 1230 angefertigten und von Peter Apian 1533 zu Nürnberg herausgegebenen Uebersetzung dieses Werkes wird nun das arabische Wort dschaib (geib) überall durch sinus ausgedrückt, welches lateinische Wort allerdings auch einer Bedeutung des arabischen entspricht. Seitdem ist dies Wort überall in Gebrauch gekommen.

Georg Peurbach (geb. 1423 zu Peurbach in Oberösterreich, gest. 1461) berechnete die Sinustafel für Winkelübergänge von 10 Minuten. Dessen Schüler Johannes Müller (1436—1476), der gewöhnlich nach seinem Geburtsorte Königsberg in Franken Regiomontan genannt wird, erweiterte nicht nur die Sinustafel bis zu den Werthen für alle einzelnen Minuten, sondern berechnete auch eine Tangententafel für alle ganzen Grade und den Halbmesser = 100,000 unter dem Namen „Tabula foecunda". Die erste Ausgabe der Regiomontan'schen Sinustafel für den Halbmesser 60,000 erschien zu Augsburg 1490, eine andere für den Halbmesser 6,000,000 und für den Halbmesser 10,000,000 zu Nürnberg 1541 im Druck. Eine von Erasmus Rheinhold, Prof. der Math. in Wittenberg (geb. zu Saalfeld in Thüringen 1511, gest. 1553), hergestellte Tangententafel für den Radius = 10,000,000, die auf alle einzelnen Minuten sich erstreckte, wurde 1553 in Tübingen gedruckt.

Wenn der Centriwinkel α eines Kreises einen spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks bildet, die eine Kathete desselben ein Halbmesser ist, die andere Kathete auf ihm in seinem Endpunkte senkrecht steht, also den Kreis in diesem Punkte berührt: so ist letztere in Theilen des Halbmessers ausgedrückt $= g\,\alpha$, und die Hypotenuse des Dreiecks, ebenfalls in Theilen des

Radius $= sec\,\alpha$, sobald man den Radius $= 1$ annimmt. Auf Grund dieses Zusammenhanges bezeichnete Georg Joachim (1514—1574), gewöhnlich wegen seines im alten Rhätien gelegenen Geburtsortes Feldkirch Rhäticus genannt, die von ihm für den Halbmesser 10,000,000 auf einzelne Minuten berechnete und vor dem Jahre 1553 herausgegebene Sekantentafel als Canon hypotenusarum. Derselbe erweiterte die Sinustafel anfangs bis auf Uebergänge von 10 zu 10 Sekunden für den Halbmesser 10,000,000,000 (Opus Palatinum de triangulis etc. 1596), später auf Uebergänge von 10 zu 10 Sekunden durch den ganzen Viertelkreis und auf alle Sekunden durch den ersten und letzten Grad desselben für den Radius 1,000,000,000,000,000 (Thesaurus Mathematicus etc. des Barth. Pitiscus (1613).

Die Einführung der Benennungen tangens und secans scheint von Thomas Fink (Geometria rotundi 1583 p. 73) herzurühren.

Der Engländer F. Gunter (1583—1626) gebrauchte zuerst statt complementi sinus die Abkürzung cosinus.

C. F. Pfleiderer: Ebene Trigonometrie (1802). §§ 8. 14. 16. 69. 71.

§ 2.

Zusammenhang der trigonometrischen Functionen desselben Winkels.

1. Man erhält aus § 1; 5 sofort

$$sin\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha = 1;\; sec\,\alpha\,.\,cos\,\alpha = 1;\; tg\,\alpha\,.\,cotg\,\alpha = 1;$$

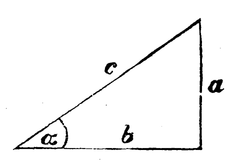
$$\therefore\; sin\,\alpha = \frac{1}{cosec\,\alpha};\; cos\,\alpha = \frac{1}{sec\,\alpha};\; tg\,\alpha = \frac{1}{cotg\,\alpha}.$$

2. Ebenso findet man (§ 1; 5)

$$sin\,\alpha = tg\,\alpha\,.\,cos\,\alpha;\; cos\,\alpha = sin\,\alpha\,.\,cotg\,\alpha;$$

$$tg\,\alpha = sin\,\alpha\,.\,sec\,\alpha;\; cotg\,\alpha = cos\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha;$$

$$\therefore\; tg\,\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha};\; cotg\,\alpha = \frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha}.$$



3. Bezeichnet man in dem Projectionsdreiecke des Winkels α (§ 1; 5) die Projicirte durch c, die Projicirende durch a und die Projection durch b, so ist (erstes Buch § 42; 8)

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Dividirt man diese Gleichung der Reihe nach durch c^2, b^2 und a^2, und drückt die erhaltenen Quotienten als Winkelfunctionen von α aus, so ergiebt sich

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1;\; 1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{c}{b}\right)^2;\; 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2$$

I. $\quad sin\, \alpha^2 + cos\, \alpha^2 = 1;$

II. $\quad 1 + tg\, \alpha^2 = sec\, \alpha^2$, oder $1 + \frac{1}{cotg\, \alpha^2} = \frac{1}{cos\, \alpha^2}$;

III. $\quad 1 + cotg\, \alpha^2 = cosec\, \alpha^2$, oder $1 + \frac{1}{tg\, \alpha^2} = \frac{1}{sin\, \alpha^2}$.

Anmerk. $sin\, \alpha^2$ bedeutet $(sin\, \alpha)^2$; $cos\, \alpha^2 = (cos\, \alpha)^2$ u. s. w.

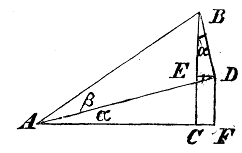
Mittels dieser Gleichungen kann aus einer gegebenen Function eines Winkels jede andere Function desselben leicht berechnet werden. Z. B. Ist $tg\, \alpha = \frac{15}{8}$ gegeben, so findet man aus III. $sin\, \alpha = \frac{15}{17}$, und aus II. $cos\, \alpha = \frac{8}{17}$.

4. Kürzer noch gelangt man zur Lösung der Aufgabe, aus einer Function eines Winkels die übrigen Functionen desselben zu berechnen, auf folgendem Wege. Man setzt den Nenner der gegebenen Winkelfunction in dem Projectionsdreiecke gleich 1, wodurch der Zähler der Function gleich wird, und berechnet aus diesen beiden die dritte Seitenstrecke. Z. B. Es sei $tg\, \alpha$ gegeben. Setzt man in der Gleichung $tg\, \alpha = \frac{a}{b}$ den Nenner $b = 1$, so wird $a = tg\, \alpha$ und $c = \sqrt{1 + tg\, \alpha^2}$, woraus $sin\, \alpha = \frac{tg\, \alpha}{\sqrt{1 + tg\, \alpha^2}}$ und $cos\, \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg\, \alpha^2}}$ folgt.

§ 3.

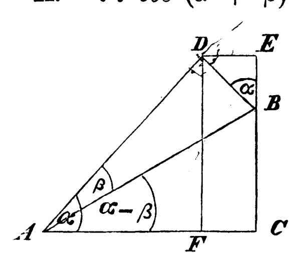
Zusammenhang der Functionen verschiedener Winkel.

1. Zwei Winkel, α und β, die den Scheitel A und einen Schenkel gemein haben, liegen neben einander, so dass ihre übrigen Schenkel den Winkel $(\alpha + \beta)$ einschliessen. Es sei



AB die gemeinschaftliche Projicirte in den Projectionsdreiecken ABC und ABD der Winkel $(\alpha + \beta)$ und β. Fällt man aus D eine Senkrechte DE auf BC, und die Senkrechte DF auf AC, so ist ADF das Projectionsdreieck für α, mit der Projicirten AD, $DF = EC$ und $DE = FC$. Ferner ist $\alpha = ADE = DBE$. Man hat also

$$sin\ (\alpha + \beta) = \frac{BC}{BA} = \frac{CE + EB}{BA} = \frac{FD}{BA} + \frac{EB}{BA};$$
$$FD = AD\ .\ sin\,\alpha;\ EB = BD\ .\ cos\,\alpha;$$
I. $\therefore\ sin\ (\alpha + \beta) = sin\,\alpha\ cos\,\beta + cos\,\alpha\ sin\,\beta.$
$$cos\ (\alpha + \beta) = \frac{AC}{AB} = \frac{AF - CF}{AB} = \frac{AF}{AB} - \frac{ED}{AB};$$
$$AF = AD\ .\ cos\,\alpha;\ ED = BD\ .\ sin\,\alpha;$$
II. $\therefore\ cos\ (\alpha + \beta) = cos\,\alpha\ cos\,\beta - sin\,\alpha\ sin\,\beta.$



Bei zwei Winkeln, α und β, die den Scheitel A und einen Schenkel gemein haben, bildet β einen Theil von α, so dass die beiden übrigen Schenkel den Winkel $\alpha - \beta$ einschliessen. Es sei AB die gemeinschaftliche Projicirte in den Projectionsdreiecken ABC und ABD der Winkel $(\alpha - \beta)$ und β. Fällt man aus D die Senkrechten DE und DF auf BC und AC, so ist ADF das Projectionsdreieck für α mit der Projicirten AD, $DF = EC$ und $DE = FC$. Ferner ist $\sphericalangle\ \alpha = DBE$. Folglich hat man
$$sin\ (\alpha - \beta) = \frac{CB}{BA} = \frac{CE - BE}{BA} = \frac{FD}{BA} - \frac{BE}{BA};$$
$$FD = AD\ .\ sin\,\alpha;\ BE = BD\ .\ cos\,\alpha;$$
III. $\therefore\ sin\ (\alpha - \beta) = sin\,\alpha\ .\ cos\,\beta - cos\,\alpha\ sin\,\beta.$
$$cos\ (\alpha - \beta) = \frac{AC}{AB} = \frac{AF + FC}{AB} = \frac{AF}{AB} + \frac{DE}{AB};$$
$$AF = AD\ .\ cos\,\alpha;\ DE = BD\ .\ sin\,\alpha;$$
IV. $\therefore\ cos\ (\alpha - \beta) = cos\,\alpha\ .\ cos\,\beta + sin\,\alpha\ sin\,\beta.$

Barthol. Pitisci Trigonometria (Francof. 1612) 37. 38. Die erste vollständige Trigonometrie. Pitiscus war 1561 zu Schlaue unweit Grünberg in Schlesien geboren, wurde Hofprediger des Kurfürsten Friedrich IV. von der Pfalz und starb 1613.

Zus. 1. $sin\ 2\alpha = 2\ sin\,\alpha\ cos\,\alpha$; $cos\,2\,\alpha = cos\,\alpha^2 - sin\,\alpha^2 = 2\,cos\,\alpha^2 - 1 = 1 - 2\ sin\,\alpha^2$.

Oder:
$$sin\,x = 2\,sin\,\frac{x}{2}\ cos\,\frac{x}{2};\ cos\,x = \left(cos\,\frac{x}{2}\right)^2 - \left(sin\,\frac{x}{2}\right)^2$$
$$= 2\,\left(cos\,\frac{x}{2}\right)^2 - 1 = 1 - 2\ sin\,\frac{x}{2}^2.$$

Zus. 2. Aus Zus. 1. folgt: $\sin\alpha^2 = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ und

$$\cos\alpha^2 = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

$$\therefore\ tg\,\alpha^2 = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}.$$

Multiplicirt man die rechte Seite dieser Gleichung im Zähler und Nenner erst mit $1 - \cos 2\alpha$ und dann mit $1 + \cos 2\alpha$, so ergiebt sich

$$tg\,\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}.$$

2. Aus den vier vorstehenden Hauptgleichungen (1.) erhält man mit Berücksichtigung von § 1; 6 und § 2; 1. 2. folgende Tabelle:

für $x =$	$\frac{\pi}{2} \mp \alpha$	$\pi \mp \alpha$	$\frac{3}{2}\pi \mp \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\sin x$	$\cos\alpha$	$\pm \sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos x$	$\pm \sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\mp \sin\alpha$	$\cos\alpha$
$tg\,x$	$\pm\, cotg\,\alpha$	$\mp\, tg\,\alpha$	$\pm\, cotg\,\alpha$	$-\,tg\,\alpha$
$cotg\,x$	$\pm\, tg\,\alpha$	$\mp\, cotg\,\alpha$	$\pm\, tg\,\alpha$	$-\,cotg\,\alpha$
$\sec x$	$\pm\, cosec\,\alpha$	$-\sec\alpha$	$\mp\, cosec\,\alpha$	$\sec\alpha$
$cosec\,x$	$\sec\alpha$	$\pm\, cosec\,\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\,cosec\,\alpha$.

Zus. 1. Ist in dem Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$ der vorstehenden Tabelle $\alpha = \frac{\pi}{4} - \beta$, so wird $\frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{4} + \beta$, und man erhält:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right);\ \sec\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) = cosec\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right);$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right);\ cosec\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) = \sec\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right);$$
$$tg\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) = cotg\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right);\ cotg\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) = tg\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right).$$

Zus. 2. Setzt man in der obigen Tabelle $\alpha = 0$ und berücksichtigt § 1; 6 und § 2; 1. 2., so findet man

für $x =$	0	$\frac{\pi}{2} \mp 0$	$\pi \mp 0$	$\frac{3}{2}\pi \mp 0$	$2\pi - 0$
$tg\ x$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0
$cotg\ x$	∞	0	$\mp\infty$	0	$-\infty$
$sec\ x$	1	$\pm\infty$	-1	$\mp\infty$	1
$cosec\ x$	∞	1	$\pm\infty$	-1	$-\infty$

und schliesst daraus

wenn x wächst von	0 bis $\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$ bis π	π bis $\frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$ bis 2π
$tg\ x$	wächst von 0 bis $+\infty$	wächst von $-\infty$ bis 0	wächst von 0 bis $+\infty$	wächst von $-\infty$ bis 0
$cotg\ x$	nimmt ab von $+\infty$ bis 0	nimmt ab von 0 bis $-\infty$	nimmt ab von $+\infty$ bis 0	nimmt ab von 0 bis $-\infty$
$sec\ x$	wächst von 1 bis $+\infty$	wächst von $-\infty$ bis -1	nimmt ab von -1 bis $-\infty$	nimmt ab von $+\infty$ bis 1
$cosec\ x$	nimmt ab von $+\infty$ bis $+1$	wächst von 1 bis $+\infty$	wächst von $-\infty$ bis -1	nimmt ab von -1 bis $-\infty$.

3. Es ist (§ 2; 2)

$$tg\ (\alpha \pm \beta) = \frac{sin\ (\alpha \pm \beta)}{cos\ (\alpha \pm \beta)} = \frac{sin\ \alpha\ cos\ \beta \pm cos\ \alpha\ sin\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta \mp sin\ \alpha\ sin\ \beta}.$$

Dividirt Zähler und Nenner der letzten Seite dieser Gleichung durch $cos\,\alpha\ cos\,\beta$, so ergiebt sich

$$tg\ (\alpha \pm \beta) = \frac{tg\,\alpha \pm tg\,\beta}{1 \mp tg\,\alpha\ tg\,\beta}.$$

$$cotg\ (\alpha \pm \beta) = \frac{cos\ (\alpha \pm \beta)}{sin\ (\alpha \pm \beta)} = \frac{cos\,\alpha\ cos\,\beta \mp sin\,\alpha\ sin\,\beta}{sin\,\alpha\ cos\,\beta \pm cos\,\alpha\ sin\,\beta}.$$

Mittels Division des Zählers und Nenners der letzten Seite dieser Gleichung durch $sin\,\alpha\ sin\,\beta$ erhält man

$$cotg\ (\alpha \pm \beta) = \frac{cotg\,\alpha\ cotg\,\beta \mp 1}{cotg\,\beta \pm cotg\,\alpha}.$$

Zus. 1. Für $\beta = \alpha$ ergiebt sich

$$tg\ 2\alpha = \frac{2\ tg\,\alpha}{1 - tg\,\alpha^2} = \frac{2}{cotg\,\alpha - tg\,\alpha}.$$

$$cotg\ 2\alpha = \frac{cotg\,\alpha^2 - 1}{2\ cotg\,\alpha} = \frac{cotg\,\alpha - tg\,\alpha}{2}.$$

Zus. 2. Für $\alpha = 45^0$, also $tg\,\alpha = 1$ wird

$$tg\,(45^0 \pm \beta) = \frac{1 \pm tg\,\beta}{1 \mp tg\,\beta} = \frac{\cos\beta \pm \sin\beta}{\cos\beta \mp \sin\beta} \text{ (§ 2; 2).}$$

G. S. Klügel: Analyt. Trig. 3; III.

4. Es ist (1.)

$$\left.\begin{aligned} \sin(\gamma + \delta) + \sin(\gamma - \delta) &= 2 \sin\gamma \cos\delta \\ \sin(\gamma + \delta) - \sin(\gamma - \delta) &= 2 \cos\gamma \sin\delta \\ \cos(\gamma + \delta) + \cos(\gamma - \delta) &= 2 \cos\gamma \cos\delta \\ \cos(\gamma + \delta) - \cos(\gamma - \delta) &= -2 \sin\gamma \sin\delta \end{aligned}\right\} \text{I.}$$

Setzt man
$$\gamma + \delta = \alpha,$$
$$\gamma - \delta = \beta,$$

so wird $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $\delta = \frac{\alpha - \beta}{2}$, mithin erhält man

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha + \sin\beta &= 2 \sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cos\frac{\alpha - \beta}{2}; \\ \sin\alpha - \sin\beta &= 2 \cos\frac{\alpha + \beta}{2} \sin\frac{\alpha - \beta}{2}; \\ \cos\alpha + \cos\beta &= 2 \cos\frac{\alpha + \beta}{2} . \cos\frac{\alpha - \beta}{2}; \\ \cos\alpha - \cos\beta &= -2 \sin\frac{\alpha + \beta}{2} \sin\frac{\alpha - \beta}{2}. \end{aligned}\right\} \text{II.}$$

Zus. 1. Wenn in den Gleichungen I. ist

$$\gamma = \frac{\pi}{4} + \alpha,\ \delta = \frac{\pi}{4} + \beta,$$

so wird $\gamma + \delta = \frac{\pi}{2} + (\alpha + \beta)$ und $\gamma - \delta = \alpha - \beta$, folglich

$$\cos(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right);$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right);$$

$$\cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right);$$

$$\cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right).$$

Zus. 2. Aus den Gleichungen II. folgt für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (2. Zus. 1.)

$$1 + \sin\beta = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right)^2 = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)^2;$$

$$1 - \sin\beta = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right)^2 = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)^2.$$

Zus. 3. Durch Division je zweier Gleichungen unter II. erhält man

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = tg\,\frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = tg\,\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\beta - \cos\alpha} = cotg\,\frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\beta - \cos\alpha} = cotg\,\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{tg\,\frac{\alpha + \beta}{2}}{tg\,\frac{\alpha - \beta}{2}};$$

$$\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\cos\beta - \cos\alpha} = \frac{cotg\,\frac{\alpha + \beta}{2}}{tg\,\frac{\alpha - \beta}{2}}.$$

L. Euler: Introd. in Analysin inf. (1748) I; 130. 131.

5. Es ist (§ 2; 2)

$$tg\,\alpha + tg\,\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta};$$

$$= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha\,\cos\beta};$$

$$tg\,\alpha - tg\,\beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha\,\cos\beta};$$

$$cotg\,\alpha + cotg\,\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha\,\sin\beta};$$

$$cotg\,\beta - cotg\,\alpha = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha\,\sin\beta}.$$

$$cotg\,\alpha + tg\,\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin\alpha\,\cos\beta};$$

$$cotg\,\alpha - tg\,\beta = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin\alpha\,\cos\beta}.$$

Zus. 1. Durch Division von je zweien unter diesen Gleichungen erhält man

$$\frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{tg\,\alpha - tg\,\beta} = \frac{cotg\,\alpha + cotg\,\beta}{cotg\,\beta - cotg\,\alpha} = \frac{sin\,(\alpha + \beta)}{sin\,(\alpha - \beta)}.$$

$$\frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{cotg\,\alpha + tg\,\beta} = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{cotg\,\alpha - cotg\,\beta} = tg\,\alpha\;tg\,\beta$$

$$\frac{cotg\,\alpha + tg\,\beta}{cotg\,\alpha - tg\,\beta} = \frac{cos\,(\alpha - \beta)}{cos\,(\alpha + \beta)}.$$

Klügel a. a. O. 3; VI.

Zus. 2. Für $\beta = \alpha$ findet man

$$cotg\,\alpha + tg\,\alpha = \frac{2}{sin\,2\,\alpha};$$

$$cotg\,\alpha - tg\,\alpha = 2\,cotg\,2\,\alpha.$$

6. Da (1. Zus. 1) $sin\,2\,\alpha = 2\,sin\,\alpha\;cos\,\alpha$ und

$$cos\,2\,\alpha = 2\,cos\,\alpha^2 - 1 = 1 - 2\,sin\,\alpha^2$$

ist, so erhält man weiter:

$$\begin{aligned}
sin\,3\,\alpha &= sin\,2\,\alpha\;cos\,\alpha + cos\,2\,\alpha\;sin\,\alpha;\\
&= sin\,\alpha\,(4\,cos\,\alpha^2 - 1);\\
&= 3\,sin\,\alpha - 4\,sin\,\alpha^3.\\
cos\,3\,\alpha &= cos\,\alpha\;cos\,2\,\alpha - sin\,\alpha\;sin\,2\,\alpha;\\
&= cos\,\alpha\,(1 - 4\,sin\,\alpha^2);\\
&= -3\,cos\,\alpha + 4\,cos\,\alpha^3.\\
sin\,4\,\alpha &= sin\,3\,\alpha\;cos\,\alpha + cos\,3\,\alpha\;sin\,\alpha;\\
&= sin\,\alpha\,(8\,cos\,\alpha^3 - 4\,cos\,\alpha);\\
&= cos\,\alpha\,(4\,sin\,\alpha - 8\,sin\,\alpha^3).\\
cos\,4\,\alpha &= cos\,3\,\alpha\;cos\,\alpha - sin\,3\,\alpha\;sin\,\alpha;\\
&= 1 - 8\,sin\,\alpha^2 + 8\,sin\,\alpha^4;\\
&= 1 - 8\,cos\,\alpha^2 + 8\,cos\,\alpha^4.\\
sin\,5\,\alpha &= sin\,\alpha\,(1 - 12\,cos\,\alpha^2 + 16\,cos\,\alpha^4)\\
&= 5\,sin\,\alpha - 20\,sin\,\alpha^3 + 16\,sin\,\alpha^5\\
cos\,5\,\alpha &= cos\,\alpha\,(1 - 12\,sin\,\alpha^2 + 16\,sin\,\alpha^4)\\
&= 5\,cos\,\alpha - 20\,cos\,\alpha^3 + 16\,cos\,\alpha^5\\
sin\,6\,\alpha &= sin\,\alpha\,(6\,cos\,\alpha - 32\,cos\,\alpha^3 + 32\,cos\,\alpha^5)\\
&= cos\,\alpha\,(6\,sin\,\alpha - 32\,sin\,\alpha^3 + 32\,sin\,\alpha^5)\\
cos\,6\,\alpha &= 1 - 18\,sin\,\alpha^2 + 48\,sin\,\alpha^4 - 32\,sin\,\alpha^6\\
&= -1 + 18\,cos\,\alpha^2 - 48\,cos\,\alpha^4 + 32\,cos\,\alpha^6\\
sin\,7\,\alpha &= 7\,sin\,\alpha - 56\,sin\,\alpha^3 + 112\,sin\,\alpha^5 - 64\,sin\,\alpha^7\\
cos\,7\,\alpha &= -7\,cos\,\alpha + 56\,cos\,\alpha^3 - 112\,cos\,\alpha^5 + 64\,cos\,\alpha^7.
\end{aligned}$$

L. Euler: Introductio I; 234. 236. 238. 243.

7. Aus den vorstehenden Gleichungen erhält man leicht

$$2\ \sin\alpha^2 = 1 - \cos 2\alpha$$
$$2\ \cos\alpha^2 = 1 + \cos 2\alpha$$
$$2^2 \sin\alpha^3 = \sin 3\alpha - 3\sin\alpha.$$
$$2^2 \cos\alpha^3 = \cos 3\alpha + 3\cos\alpha$$
$$2^3 \sin\alpha^4 = \cos 4\alpha - 4\cos 2\alpha + 3$$
$$2^3 \cos\alpha^4 = \cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3$$
$$2^4 \sin\alpha^5 = \sin 5\alpha - 5\sin 3\alpha + 10\sin\alpha$$
$$2^4 \cos\alpha^5 = \cos 5\alpha + 5\cos 3\alpha + 10\cos\alpha$$
$$2^5 \sin\alpha^6 = -\cos 6\alpha + 6\cos 4\alpha - 15\cos 2\alpha + 10$$
$$2^5 \cos\alpha^6 = \cos 6\alpha + 6\cos 4\alpha + 15\cos 2\alpha + 10$$
$$2^6 \sin\alpha^7 = -\sin 7\alpha + 7\sin 5\alpha - 21\sin 3\alpha + 35\sin\alpha$$
$$2^6 \cos\alpha^7 = \cos 7\alpha + 7\cos 5\alpha + 21\cos 3\alpha + 35\cos\alpha.$$

L. **Euler** a. a. O. 262. 263.

8. Aus der Gleichung (3. Zus. 1)

$$tg\ 2\alpha = \frac{2\ tg\,\alpha}{1 - tg\,\alpha^2}$$

erhält man

$$tg\ 3\alpha = \frac{3\ tg\,\alpha - tg\,\alpha^3}{1 - 3\ tg\,\alpha^2}$$
$$tg\ 4\alpha = \frac{4\ tg\,\alpha - 4\ tg\,\alpha^3}{1 - 6\ tg\,\alpha^2 + tg\,\alpha^4}$$
$$tg\ 5\alpha = \frac{5\ tg\,\alpha - 10\ tg\,\alpha^3 + tg\,\alpha^5}{1 - 10\ tg\,\alpha^2 + 5\ tg\,\alpha^4}.$$

L. **Euler** a. a. O. 249.

9. Aus § 1; 3 ergiebt sich unter der Voraussetzung, dass n eine ganze positive Zahl bezeichnet

$$\sin(2n\pi + \alpha) = \sin\alpha;$$
$$\cos(2n\pi + \alpha) = \cos\alpha;$$
$$\therefore\ tg\,(2n\pi + \alpha) = tg\,\alpha.$$

10. Nach § 1; 4 ist

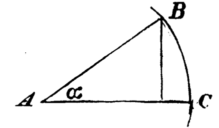
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha;$$
$$\therefore\ tg\,(-\alpha) = -tg\,\alpha.$$

§ 4.

Drehungsfactoren.

1. Die Lage der Seitenstrecken in dem Projectionsdreiecke ABC des Winkels $\alpha = BAC$ lässt sich nun goniometrisch

ausdrücken. Nimmt man nämlich an, dass die Projicirte AB der Längeneinheit gleich ist, dass für $\alpha < \frac{\pi}{2}$ die Projection AC eine positive Zahl ausdrückt, und dass die Projicirende BC auf der positiven Seite der Projectionsbasis liegt (§ 1; 2): so ist $AC = \cos\alpha$, $BC = i \sin\alpha$ (1. B. § 42; 8. Zus. 1), wenn $i = \sqrt{-1}$. Der Punkt B, also auch die Richtung von AB, ist dann durch den Ausdruck $\cos\alpha + i\sin\alpha$, welcher der **Drehungsfactor von** α heissen soll, bestimmt. Liegt BC auf der negativen Seite der Projectionsbasis, so ist für $\alpha < \frac{\pi}{2}$ der Drehungsfactor $\cos\alpha - i\sin\alpha$. Wenn $\cos\alpha$ negativ ist, so muss der Drehungsfactor in der Gestalt $-\cos\alpha \pm i\sin\alpha$ auftreten.

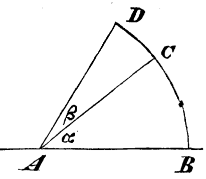


K. F. Gauss: Gött. Gel. Anz. 1831. Stück 64. — C. H. Schnuse nennt (Cournot's Theorie der Functionen [Darmstadt 1845] S. 82) den Ausdruck $\cos\alpha \pm i\sin\alpha$ den „Richtungscoefficienten".

2. Es ist

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\alpha - i\sin\alpha) = \cos\alpha^2 + \sin\alpha^2$$
$$\therefore 1 = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\alpha - i\sin\alpha). \quad (\S\ 2;\ 3).$$

3. Beschreibt man mit der Längeneinheit AB als Radius zwei Winkel $\alpha = BAC$ und $\beta = CAD$, so dass $\sphericalangle BAD = \alpha + \beta$, dann hat man



$$(\cos\alpha \pm i\sin\alpha)(\cos\beta \pm i\sin\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \pm i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$
$$\therefore (\cos\alpha \pm i\sin\alpha)(\cos\beta \pm i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) \pm i\sin(\alpha+\beta).$$

Auf gleiche Weise ergiebt sich für die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$..

$$(\cos\alpha \pm i\sin\alpha)(\cos\beta \pm i\sin\beta)(\cos\gamma \pm i\sin\gamma)(\cos\delta + i\sin\delta)\ldots = \cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta..) \pm i\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta..).$$

I. **Das Produkt aus den Drehungsfactoren mehrerer Winkel ist dem Drehungsfactor der Summe dieser Winkel gleich.**

Setzt man in der letzten Gleichung $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \ldots$, und ist die Anzahl der gleichen Winkel n, so erhält man

II. $\quad (\cos\alpha \pm i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha \pm i\sin n\alpha.$

Für einen Quotienten findet man

$$\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta + i\sin\beta} = \frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta - i\sin\beta)}{(\cos\beta + i\sin\beta)(\cos\beta - i\sin\beta)} =$$

$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta - i\sin\beta) = \cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta)$ (2.).

III. Der Quotient aus den Drehungsfactoren zweier Winkel ist dem Drehungsfactor der Differenz derselben gleich.

Es ist also $\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta + i\sin\beta} = \frac{\cos\beta - i\sin\beta}{\cos\alpha - i\sin\alpha}$;

$$\frac{1}{\cos\alpha \pm i\sin\beta} = \cos\alpha \mp i\sin\beta.$$

IV. $\therefore (\cos\alpha \pm i\sin\alpha)^{-n} = \frac{1}{\cos n\alpha \pm i\sin n\alpha}$

$$= \cos n\alpha \mp i\sin n\alpha.$$

Aus der II. Gleichung ergiebt sich, wenn man $n\alpha = \omega$ setzt, und dann mit $\frac{1}{n}$ potenzirt

$$\cos\frac{\omega}{n} + i\sin\frac{\omega}{n} = (\cos\omega + i\sin\omega)^{\frac{1}{n}}.$$

Potenzirt man diese Gleichung weiter mit der ganzen Zahl m, so hat man

V. $\cos\frac{m}{n}\omega + i\sin\frac{m}{n}\omega = (\cos\omega + i\sin\omega)^{\frac{m}{n}}$.

L. Euler: Introductio I. 132. 133.

4. Es ergiebt sich aus der Addition und Subtraction der beiden Gleichungen (3. II.)

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$$

$$(\cos\alpha - i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha - i\sin n\alpha$$

$$\cos n\alpha = \frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n + (\cos\alpha - i\sin\alpha)^n}{2};$$

$$\sin n\alpha = \frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n - (\cos\alpha - i\sin\alpha)^n}{2i}.$$

Entwickelt man die Potenzen nach dem binomischen Satze, so folgt

$$\cos n\alpha = \cos\alpha^n - \binom{n}{2}\cos\alpha^{n-2}\sin\alpha^2 + \binom{n}{4}\cos\alpha^{n-4}\sin\alpha^4 - \binom{n}{6}\cos\alpha^{n-6}\sin\alpha^6 + \ldots$$

$$\sin n\alpha = n\cos\alpha^{n-1}\sin\alpha - \binom{n}{3}\cos\alpha^{n-3}\sin\alpha^3 + \binom{n}{5}\cos\alpha^{n-5}\sin\alpha^5 - \ldots$$

Hiernach ist z. B.

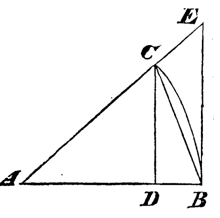
$$\cos 2\alpha = \cos\alpha^2 - \sin\alpha^2$$
$$\cos 3\alpha = \cos\alpha^3 - 3\cos\alpha \sin\alpha^2$$
$$\cos 4\alpha = \cos\alpha^4 - 6\cos\alpha \sin\alpha^2 + \sin\alpha^4$$
$$\cos 5\alpha = \cos\alpha^5 - 10\cos\alpha^3 \sin\alpha^2 + 5\cos\alpha \sin\alpha^4 \text{ u. s. w.}$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$$
$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha \cos\alpha^2 - \sin\alpha^3$$
$$\sin 4\alpha = 4\sin\alpha \cos\alpha^3 - 4\cos\alpha \sin\alpha^3$$
$$\sin 5\alpha = 5\sin\alpha \cos\alpha^4 - 10\sin\alpha^3 \cos\alpha^2 + \sin\alpha^5 \text{ u. s. w.}$$

Vgl. § 3; 6. — L. Euler a. a. O. 133.

§ 5.

Berechnung der Winkelfunctionen.

1. Die Längeneinheit AB beschreibe, durch eine Drehung um A, den Sector ABC mit dem Bogen $BC = \alpha$. Von C aus sei auf AB die Senkrechte CD gefällt und in B auf AB eine Senkrechte errichtet, welche den verlängerten Radius AC in E trifft. — Aus der Vergleichung der drei Flächen, des Dreiecks ABE ($\triangle\,\overline{ABE}$), des Sectors ABC ($sc\,\overline{ABC}$) und des Dreiecks ABC ($\triangle\,\overline{ABC}$) ergiebt sich (1. B. § 38; 6. § 47; 15)



$$\triangle\,\overline{ABE} > sc\,\overline{ABC} > \triangle\,\overline{ABC};$$
$$\therefore AB\,.\,BE > AB\,.\,\alpha > AB\,.\,CD;$$
$$BE > \alpha > CD;$$
$$tg\,\alpha > \alpha > \sin\alpha$$
$$\therefore \frac{1}{\cos\alpha} > \frac{\alpha}{\sin\alpha} > 1;\ 1 > \frac{\alpha}{tg\,\alpha} > \cos\alpha.$$

Wenn nun α sich dem Werthe o nähert, so nähert sich $\cos\alpha$, also auch $\frac{1}{\cos\alpha}$, dem Werthe 1 (§ 1; 6), mithin ist auch 1 der Grenzwerth von $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ und $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$, von $\frac{\alpha}{tg\,\alpha}$ und $\frac{tg\,\alpha}{\alpha}$.

Newton: Philos. nat. princ. mathem. I; lemma 7.

2. Es sollen nun für $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ mittels der Methode der unbestimmten Coefficienten Reihen gesucht werden, welche, wie die dekadischen Zahlen nach Potenzen von 10, nach ganzen



Potenzen des Winkels α fortschreiten, wenn α die Länge des Bogens für den Radius = 1 ausdrückt. Es sei

(*A.*) $\sin\alpha = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 + a_4\alpha^4 + ..$

(*B.*) $\cos\alpha = b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^2 + b_3\alpha^3 + b_4\alpha^4 + ..$

Da nach § 3; 10

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

ist, so ergiebt sich, wenn man $-\alpha$ statt $+\alpha$ in (*A.*) und (*B.*) einsetzt,

$$a_0 - a_1\alpha + a_2\alpha^2 - a_3\alpha^3 + a_4\alpha^4 - .. = - a_0 - a_1\alpha - a_2\alpha^2 - a_3\alpha^3 - a_4\alpha^4 - ..$$

$$b_0 - b_1\alpha + b_2\alpha^2 - b_3\alpha^3 + b_4\alpha^4 - .. = b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^2 + b_3\alpha^3 + b_4\alpha^4 + ..$$

(*C.*) $\therefore\ a_0 + a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4 + a_6\alpha^6 + .. = 0$

(*D.*) $\quad b_1\alpha + b_3\alpha^3 + b_5\alpha^5 + b_7\alpha^7 + .. = 0.$

Setzt man in (*C.*) $\alpha = 0$, so ergiebt sich $a_0 = 0$. Dividirt man nun die Gleichung $a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4 + a_6\alpha^6 + .. = 0$ durch α^2 und setzt dann wiederum $\alpha = 0$, so erhält man $a_2 = 0$. Auf gleiche Art ergiebt sich

$$a_4 = 0,\ a_6 = 0 \text{ etc.};\ b_1 = 0,\ b_3 = 0,\ b_5 = 0 \text{ etc.}$$

so dass die Gleichungen (*A.*) und (*B.*) in folgende übergehen:

(*E.*) $\sin\alpha_1 = a\ \alpha + a_3\alpha^3 + a_5\alpha^5 + a_7\alpha^7 + ..$

(*F.*) $\cos\alpha = b_0 + b_2\alpha^2 + b_4\alpha^4 + b_6\alpha^6 + ..$

In der Reihe für $\sin\alpha$ fehlen mithin alle geraden, in der für $\cos\alpha$ alle ungeraden Potenzen von α.

Dividirt man die Reihe (*E.*) durch α und lässt α in 0 übergehen, so wird $\frac{\sin\alpha}{\alpha} = a_1 = 1$, so dass man erhält

$$\sin\alpha = \alpha + a_3\alpha^3 + a_5\alpha^5 + a_7\alpha^7 + ...$$

Es ist nach § 4; 3

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha,$$

$$\therefore\ (b_0 + b_2\alpha^2 + b_4\alpha^4 + .. + i\alpha + ia_3\alpha^3 + ia_5\alpha^5 + ..)^2 = b_0 + b_2(2\alpha)^2 + b_4(2\alpha)^4 + ..\ 2i\alpha + ia_3(2\alpha)^3 + ia_5(2\alpha)^5 + ..;$$

$$\therefore\ b_0^2 + (2b_0b_2 - 1)\alpha^2 + (2b_0b_4 + b_2^2 - 2a_3)\alpha^4 + (2b_0b_6 + 2b_2b_4 - 2a_5 - a_3^2)\alpha^6 + .. = b_0 + 4b_2\alpha^2 + 16b_4\alpha^4 + 64b_6\alpha^6 + ..;$$

$$2i[b_0\alpha + (a_3b_0 + b_2)\alpha^3 + (a_5b_0 + a_3b_2 + b_4)\alpha^5 + ..] = 2i(\alpha + 4a_3\alpha^3 + 16a_5\alpha^5 + ..).$$

Die beiden letzten Gleichungen drücken aus, dass in der ihnen vorhergehenden die reellen wie die imaginären Theile einander gleich sind. Weiter aber erhält man für die Coefficienten folgende Beziehungen:

$b_0^2 = b_0$	$b_0 = 1$
$2 b_0 b_2 - 1 = 2 b_2$	$a_3 b_0 + b_2 = 4 a_3$
$2 b_0 b_4 + b_2^2 - 2 a_3 = 16 b_4$	$a_5 b_0 + a_3 b_2 + b_4 = 16 a_5$
$2 b_0 b_6 + 2 b_2 b_4 - 2 a_5 - a_3^2 = 64 b_6;$	$a_7 b_0 + a_5 b_2 + a_3 b_4 + b_6 = 64 a_7$

. . . .

$$\therefore b_0 = 1,\ b_2 = -\frac{1}{2},\ b_4 = \frac{1}{4!},\ b_6 = -\frac{1}{6!} \text{ u. s. w.}$$

$$a_1 = 1,\ a_3 = -\frac{1}{3!},\ a_5 = \frac{1}{5!},\ a_7 = -\frac{1}{7!} \text{ u. s. w.}$$

Es ist also

$$\text{I.} \qquad \sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \cdots$$

$$\text{II.} \qquad \cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \cdots$$

J. Newton: Brief Oldenburg's an Leibniz vom 12. April 1675.

3. Für praktische Rechnungen ist es wichtig, zu wissen, bei welcher Grösse von α $\sin\alpha$ von α und $\cos\alpha$ von 1 noch nicht um eine Einheit der $n$ten Decimalstelle, oder um $\frac{1}{10^n}$, verschieden ist. Aus den vorstehenden Gleichungen folgt:

$$\text{für } \sin\alpha \text{ muss } \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} < \frac{1}{10^n},\ \therefore \alpha < \sqrt[3]{\frac{6}{10^n}},$$

$$\text{für } \cos\alpha \text{ muss } 1 - \frac{\alpha^2}{2} < \frac{1}{10^n},\ \therefore \alpha < \sqrt{\frac{2}{10^n}}$$

sein. Wenn z. B. $\sin\alpha$ von α und $\cos\alpha$ von 1 nicht um 0,000001 abweichen soll, so hat man für $\sin\alpha$

$$\begin{array}{l} lg\ 6 = 0{,}778151 \\ lg\ 10^6 = 6 \\ \hline 0{,}778151 - 6 \\ \hline 0{,}2593837 - 2 = lg\ 0{,}0181712 \quad (:3 \\ \therefore \alpha < 0{,}0181712. \end{array}$$

Will man diesen Werth des Winkels in Graden, Minuten und

Sekunden ausdrücken, so hat man, um zunächst die Sekunden zu erhalten, 0,0181712 mit 206264,8 zu multipliciren (§ 46; 15). Nun ist

$$\begin{aligned} lg\ 0{,}018172 &= 0{,}2593837 - 2 \\ lg\ \ 206264 &= 5{,}314425 \\ &\overline{\ 3{,}5738087 = lg\ 3748''} \end{aligned}$$

$$\therefore\ \alpha < 1^0\ 2'\ 28''.$$

Für $cos\,\alpha$ ist

$$\begin{aligned} lg\ 2 &= 0{,}301030 \\ lg\ 10^6 &= 6 \\ &\overline{0{,}30103 - 6} \\ &\overline{0{,}150515 - 3}^{(:2} = lg\ 0{,}00141421 \\ &5{,}314425 \\ &\overline{2{,}46494 = lg\ 291{,}7} \end{aligned}$$

$$\therefore\ \alpha < 0{,}00141421 \text{ in Theilen des Radius,}$$

oder $\alpha < 4'51{,}7''$.

Es ist also $sin\ (1^0\ 2'\ 27'')$ von dem zu diesem Winkel gehörigen mit dem Radius = 1 beschriebenen Bogen noch nicht um 0,000001 verschieden. Ebenso weicht $cos\ (4'\ 51'')$ von 1 noch nicht um 0,000001 ab.

Zweites Hauptstück:

Berechnung des Dreiecks.

§ 6.

Goniometrische Gleichungen.

1. Wenn α, β, γ die drei Winkel eines Dreiecks sind, so ist $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ (1. B. § 13; 2), und daher (§ 3; 2)

$$\begin{aligned} sin\,\alpha &= sin\,(\beta + \gamma) \\ cos\,\alpha &= -\ cos\,(\beta + \gamma) \\ tg\,\alpha &= -\ tg\,(\beta + \gamma). \end{aligned}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\beta+\gamma}{2}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\beta+\gamma}{2}$$
$$tg\frac{\alpha}{2} = cotg\frac{\beta+\gamma}{2}$$
$$cotg\frac{\alpha}{2} = tg\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

2. Es ist

$$\sin\alpha = \sin(\beta+\gamma) = 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2} \quad (\S\ 3;\ 1.\ \text{Zus. } 1)$$
$$\sin\beta + \sin\gamma = 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} \quad (\S\ 3;\ 4)$$
$$\therefore \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\left(\cos\frac{\beta+\gamma}{2} + \cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right)$$
$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Zusatz. Hieraus folgt, weil

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = \sin(\pi - 2\alpha) + \sin(\pi - 2\beta) + \sin(\pi - 2\gamma)$$
$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

3. Aehnlich wie unter Nr. 2 erhält man aus

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}$$
$$\sin\beta - \sin\gamma = 2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}$$
$$\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Zus. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma = 4\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma.$

4. Es ist $\cos\alpha = 1 - 2\sin\frac{\alpha}{2}^2$ (§ 3; 1. Zus. 1.)

$$\cos\beta + \cos\gamma = 2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2};$$
$$\therefore \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\beta-\gamma}{2} - \cos\frac{\beta+\gamma}{2}\right)$$
$$= 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + 1.$$

Zusatz. $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -(4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + 1).$

5. Aehnlich wie unter Nr. 4 findet man

$$\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - 1.$$

Zusatz. $\cos 2\alpha + \cos 2\beta - \cos 2\gamma = 1 - 4\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$.

6. Es ist $tg\,\alpha = -\,tg\,(\beta + \gamma)$; (1.)

$$= -\frac{tg\,\beta + tg\,\gamma}{1 - tg\,\beta\,tg\,\gamma};$$

$$\therefore\; tg\,\alpha - tg\,\alpha\,tg\,\beta\,tg\,\gamma = -(tg\,\beta + tg\,\gamma);$$

$$tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma = tg\,\alpha\,tg\,\beta\,tg\,\gamma.$$

Zusatz. Da $cotg\,\frac{\alpha}{2} + cotg\,\frac{\beta}{2} + cotg\,\frac{\gamma}{2} = tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}\right) + tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)$ und $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\beta + \gamma}{2}$ ist, so erhält man

$$cotg\,\frac{\alpha}{2} + cotg\,\frac{\beta}{2} + cotg\,\frac{\gamma}{2} = cotg\,\frac{\alpha}{2}\,cotg\,\frac{\beta}{2}\,cotg\,\frac{\gamma}{2}.$$

7. Es ist $1 - \cos\alpha^2 = \sin\alpha^2 = \sin(\beta + \gamma)^2$

$$= \sin\beta^2\cos\gamma^2 + 2\sin\beta\cos\beta\sin\gamma\cos\gamma + \cos\beta^2\sin\gamma^2$$

Addirt man auf beiden Seiten $-\cos\beta^2 - \cos\gamma^2$, so ergiebt sich

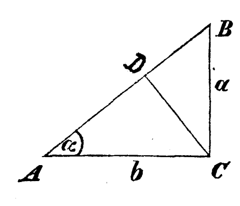
$$\begin{aligned}1 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 &= 2\sin\beta\cos\beta\sin\gamma\cos\gamma - \cos\beta^2\cos\gamma^2 \\ &\quad - \cos\gamma^2\cos\beta^2 \\ &= 2\cos\beta\cos\gamma(\sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma) \\ &= -2\cos\beta\cos\gamma\cos(\beta + \gamma)\end{aligned}$$

$$1 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

J. Götz: Trigonometrie etc. (Berlin 1833) §§ 53—55. 101.

§ 7.

Das rechtwinklige Dreieck.



1. In dem rechtwinkligen Dreiecke ABC sei $AB = c$ die Hypotenuse, $AC = b$, $BC = a$, $\sphericalangle BAC = \alpha$. — Nach 1. B. § 42; 8 besteht die Gleichung zwischen den Längen der Seitenstrecken:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Ausserdem lassen sich noch folgende Seitenstrecken und

Winkel durch verschiedene trigonometrische Gleichungen verbinden (§ 1; 5).

I. Die Hypotenuse, eine Kathete und der eingeschlossene Winkel, z. B.

$$b = c \cos\alpha;$$

II. die Hypotenuse, eine Kathete und der letzterer gegenüber liegende Winkel, z. B.

$$a = c \,.\, \sin\alpha;$$

III. die beiden Katheten und ein Winkel, z. B.

$$a = b \,.\, tg\,\alpha.$$

Joh. Müller, Regiomontanus (1436—1476): De triangulis omnimodis (1533) Lib. I. 27—30.

Da in jeder Gleichung jede Grösse als Unbekannte betrachtet und durch die beiden andern bestimmt werden kann, so ergeben sich aus den drei aufgestellten Fällen neun Fundamentalaufgaben.

2. Der Flächeninhalt F des rechtwinkligen Dreiecks ist aus den Seitenstrecken durch die Gleichungen

$$F = \frac{a \,.\, b}{2} \text{ (1. B. § 38; 6. Zus.),}$$

$$F = \frac{a}{2} \sqrt{c^2 - a^2} = \frac{a}{2} \sqrt{(c+a)(c-a)}$$

zu berechnen. Ausserdem lässt sich der Flächeninhalt noch mit je einer Seitenstrecke und einem Winkel zu einer trigonometrischen Gleichung verbinden, nämlich

I. mit einer Kathete und einem anliegenden Winkel, z. B. Es ist $a = b \,.\, tg\,\alpha$

$$\therefore\; F = \frac{b^2}{2}\, tg\,\alpha;$$

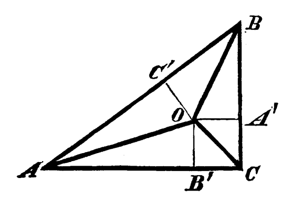
II. mit einer Kathete und dem gegenüber liegenden Winkel, z. B. Es ist $b = a \cot g\,\alpha$

$$\therefore\; F = \frac{a^2}{2} \cot g\,\alpha;$$

III. mit der Hypotenuse und einem anliegenden Winkel. Z. B. Es ist, wenn man aus C auf c die Senkrechte CD fällt, $CD = b \,.\, \sin\alpha$; $b = c \,.\, \cos\alpha$.

$$\therefore\; F = \frac{c^2}{2} \sin\alpha \,.\, \cos\alpha = \left(\frac{c}{2}\right)^2 \sin 2\alpha.$$

Beisp. $a = 33^{cm}$, $b = 56^{cm}$, $c = 65^{cm}$, $\alpha = 30^0\, 30'\, 37''$; $F = 924^{\square cm}$.



3. In dem bei C rechtwinkligen Dreiecke ABC sei O der Durchschnitt von den Halbirungslinien der drei Winkel; die Fusspunkte der aus O auf die Seitenstrecken a, b, c gefällten Senkrechten werden durch A', B', C' bezeichnet. — Dann ist O der Mittelpunkt des Kreises, welcher die Seitenstrecken des Dreiecks ABC von innen berührt (1. B. § 24; 10). Ist $OA' = OB' = OC' = \varrho$, so hat man (1. B. § 29; 2)

I. $$2\varrho = a + b - c,$$

weil $CA' = CB' = \varrho$ ist. Ferner ist $tg\ OAB' = OB' : AB'$ oder

II. $$tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{b - \varrho};\ \varrho = (b - \varrho)\ tg\,\frac{\alpha}{2}.$$

Beachtet man, dass $\sphericalangle\ \alpha + \beta = 90^0$ also $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 45^0$ und dass $tg\ 45^0 = 1$ ist, so erhält man

$$tg\ OBA' = tg\,\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{a - \varrho} = tg\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - tg\,\frac{\alpha}{2}}{1 + tg\,\frac{\alpha}{2}}$$

(§ 3; 3. Zus. 2)

$$\therefore\ \varrho + \varrho\ tg\,\frac{\alpha}{2} = a - \varrho - (a - \varrho)\ tg\,\frac{\alpha}{2}$$

III. $$a\ tg\,\frac{\alpha}{2} = a - 2\varrho.$$

Nun folgt aus III. $a = \dfrac{2\varrho}{1 - tg\,\frac{\alpha}{2}}$, und aus II.

$$b - \varrho = \frac{\varrho}{tg\,\frac{\alpha}{2}};$$

$$\therefore\ a + b - \varrho = c + \varrho = \frac{\varrho}{tg\,\frac{\alpha}{2}} + \frac{2\varrho}{1 - tg\,\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\varrho\left(1 + tg\,\frac{\alpha}{2}\right)}{tg\,\frac{\alpha}{2}\left(1 - tg\,\frac{\alpha}{2}\right)};$$

IV. $$c + \varrho = \varrho \, cotg \, \frac{\alpha}{2} \, cotg \left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Aus I. erhält man

$$(2 \varrho + c)^2 = (a + b)^2$$
$$\therefore 4 \varrho^2 + 4 c\varrho = 2 ab;$$

und da $sin \alpha = \frac{a}{c}$ und $cos \alpha = \frac{b}{c}$ ist, so hat man auch

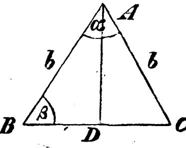
$$2 \, sin \alpha \, cos \alpha = \frac{2 ab}{c^2};$$

V. $$\therefore sin \, 2 \alpha = \frac{4 \varrho (\varrho + c)}{c^2}.$$

Beispiel: $a = 39^{cm}$, $b = 80^{cm}$, $c = 89^{cm}$, $2 \alpha = 51^0 \, 58' \, 43''$, $\varrho = 15^{cm}$.

§ 8.

Das gleichschenklige Dreieck und die regelmässigen Vielecke.



1. In dem Dreiecke ABC sei $BC = a$, $AB = AC = b$, $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = BCA = \beta$. — Fällt man aus der Spitze A dieses gleichschenkligen Dreiecks auf die Basis die Senkrechte $AD = h$, so erhält man zwei congruente rechtwinklige Dreiecke $ABD \cong ACD$ und mittels derselben, wenn F den Flächeninhalt bezeichnet, nach § 7; 1. 2 die Gleichungen

I. $$a = 2 \, b \, . \, sin \, \frac{\alpha}{2} = 2 \, b \, . \, cos \, \beta;$$

II. $$h = b \, . \, cos \, \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} \, . \, cotg \, \frac{\alpha}{2};$$

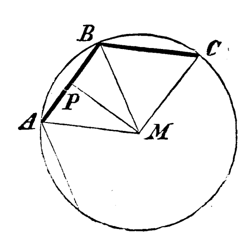
III. $$F = \frac{a^2}{4} \, . \, cotg \, \frac{\alpha}{2};$$

IV. $$F = h^2 \, . \, tg \, \frac{\alpha}{2}.$$

Fällt man aus B eine Senkrechte auf AC, so ist dieselbe $= b \, . \, sin \alpha$, und man hat

V. $$F = \frac{b^2 \, . \, sin \alpha}{2} = \frac{b^2 \, . \, sin \, 2\beta}{2}.$$

Beispiel: $a = 114^{cm}$, $c = 185^{cm}$, $h = 176^{cm}$, $ABC = 10032^{\square cm}$, $\alpha = 35^0 \, 53' \, 26''$.



2. Es sei $ABC..$ ein einfaches regelmässiges $n$eck. Die Halbirungslinien der Winkel bei A und B treffen in M zusammen, und es ist von M aus auf eine Seitenstrecke AB die Senkrechte MP gefällt. — Dann ist M der Mittelpunkt des dem $n$ecke umgeschriebenen und des ihm eingeschriebenen Kreises (1. B. § 24; 11). Es sei $MA = MB = MC = r$, $MP = \varrho$. Der Umfang des $n$ecks werde durch u, der Flächeninhalt desselben durch F_n bezeichnet. Nun ist (1.), weil

$$\sphericalangle\, AMB = \frac{360^0}{n},\ \sphericalangle\, AMP = \frac{180^0}{n},$$

I. $$u = 2\,n\,r\,\sin\frac{180^0}{n};$$

II. $$u = 2\,n\,\varrho\,tg\,\frac{180^0}{n};$$

III. $$F_n = n\,\varrho^2\,tg\,\frac{180^0}{n};$$

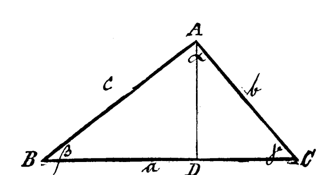
IV. $$F_n = \frac{n\,r^2}{2}\,\sin\frac{360^0}{n}.$$

Beispiel. $n = 17$, $\frac{360^0}{n} = 21^0\ 10'\ 35''$, $r = 468^{cm}$, $\varrho = 460{,}03^{cm}$, $u = 2923{,}85^{cm}$, $F_n = 672523^{\square cm}$.

Das schiefwinklige Dreieck.

§ 9.

a) Winkel und Seitenstrecken.



1. In dem Dreiecke ABC sei $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $\sphericalangle\, CAB = \alpha$, $ABC = \beta$, $BCA = \gamma$. — Fällt man aus A auf BC die Senkrechte AD, so besteht ABC aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken ABD und ACD. Für jedes derselben lässt sich nach § 7 eine Gleichung zwischen drei Stücken aufstellen, unter denen sich AD befindet. Eliminirt man AD aus beiden Gleichungen, so ergiebt sich eine Gleichung zwischen 4 Stücken. Sollen dieselben aus einzelnen Seitenstrecken und Winkeln bestehen, so sind drei Fälle möglich: Es kann eine Gleichung bestimmt werden durch

I. zwei Seitenstrecken und die ihnen gegenüber liegenden Winkel,

II. zwei Seitenstrecken, den eingeschlossenen und einen gegenüber liegenden Winkel,

III. drei Seitenstrecken und einen Winkel.

Mittels der drei Winkel lässt sich eine Seitenstrecke nicht bestimmen. Es folgt die Entwickelung der Gleichungen.

2. Es ist $AD = b \,.\, \sin\gamma = c \sin\beta.$

Fällt man aus B auf AC eine Senkrechte, so findet man

$$a \sin\gamma = c \sin\alpha.$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

und auch

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

Sinus: In jedem Dreiecke verhalten sich zwei Seitenstrecken wie die Sinus der ihnen gegenüber liegenden Winkel.

Regiomontan: De triangulis etc. Lib. II. 1.

Beispiel: $7 : 4 = \sin 74^0 : \sin 33^0\, 19'\, 7''.$

3. Aus $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$ (2.) folgt

$$\begin{aligned} b \,.\, \sin\alpha &= a \sin(\alpha + \gamma) \\ &= a \sin\alpha \cos\gamma + a \cos\alpha \sin\gamma; \end{aligned}$$

$$\therefore\; b = a \cos\gamma + a \cot g\,\alpha \sin\gamma;$$

$$\cot g\,\alpha = \frac{b - a\cos\gamma}{a \sin\gamma}$$

Ebenso findet man

$$\cot g\,\alpha = \frac{c - a\cos\beta}{a\sin\beta}$$

$$\cot g\,\beta = \frac{a - b\cos\gamma}{b\sin\gamma} = \frac{c - b\cos\alpha}{b\sin\alpha}$$

$$\cot g\,\gamma = \frac{a - c\cos\beta}{c \,.\, \sin\beta} = \frac{b - c\cos\alpha}{c\sin\alpha}.$$

Man kann diese Gleichungen auch aus der Figur herleiten. Z. B. Es ist

$$AD = c\sin\beta,\; BD = c \,.\, \cos\beta,\; DC = a - c \,.\, \cos\beta,$$

$$\therefore\; \frac{DC}{AD} = \cot g\,\gamma = \frac{a - c\cos\beta}{c \,.\, \sin\beta}.$$

Beispiel. $a = 60^{cm}$, $c = 50^{cm}$, $\beta = 41^0\,17'$; wie gross ist γ?

$$cotg\,\gamma = \frac{1,2 - cos\,\beta}{sin\,\beta}$$

$$\begin{array}{rl}
\frac{a}{c} & = 1,2 \\
cos\,\beta & = 0,751456 \\
\hline
lg\ 0,448544 & = 0,651805 - 1 \\
lg\ sin\,\beta & = 9,819401 - 10 \\
\hline
lg\ cotg\,\gamma & = 9,832404 - 10 = lg\ cotg\ 55^0\,47'\,27''. \\
 & 34 \\
 & \overline{300} : 45 = 7 \\
 & 315.
\end{array}$$

4. Es ist (1. B. § 42; 8.)

$$c^2 = AD^2 + BD^2;$$
$$AD = b\,sin\,\gamma,\ BD = a - b\,cos\,\gamma;$$
$$\therefore\ c^2 = a^2 - 2\,ab\,cos\,\gamma + b^2\,cos\,\gamma^2 + b^2\,sin\,\gamma^2,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\,cos\,\gamma.$$

Ebenso findet man

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\,cos\,\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac\,cos\,\beta.$$

Franciscus Vieta (1540—1603): Opera mathem. Lugd. Bat. 1646; p. 402 ohne Beweis. Letzteren gab Willebrord Snellius: Doctrina triangulorum. Lugd. Bat. 1627. Lib. II. p. 73.

Giebt man den letzten Gleichungen die Form

$$cos\,\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab},$$

so lässt sich ihr Inhalt so ausdrücken:

Cosinussatz: Man erhält den Cosinus eines Winkels, wenn man von der Summe aus den Längenquadraten der ihn einschliessenden Seitenstrecken das Längenquadrat der gegenüber liegenden subtrahirt, und die Differenz durch das doppelte Längenprodukt jener zwei Seitenstrecken dividirt.

Beisp.: Für $a = 4^{dm}$, $b = 5^{dm}$, $c = 7^{dm}$ ist $\gamma = 101^0\,32'\,13''$.

Zusatz. Es ist

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha$$
$$= (b+c)^2 - 2\,bc\,(1+\cos\alpha)$$
$$= (b+c)^2 - 4\,bc\cos\frac{\alpha}{2}^2.$$
$$= \left(b + c + 2\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{bc}\right)\left(b + c - 2\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{bc}\right).$$

Die vorstehende Entwickelung (1—4) giebt im Wesentlichen bereits G. S. Klügel: Analyt. Trigon. (1770) 2. Cap. I—IV.

5. Will man aus zwei Seitenstrecken und dem eingeschlossenen Winkel die übrigen Winkel des Dreiecks berechnen, so kann man dazu statt der oben (3.) abgeleiteten Gleichungen auch andere gebrauchen, die eine ununterbrochene logarithmische Entwickelung gestatten.

Es ist nämlich $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$ (2.)

$$\therefore \frac{a}{b} \pm 1 = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \pm 1;$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{a+b}{b} &= \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\beta} = \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\beta} \\ \frac{a-b}{b} &= \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\beta} = \frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\beta} \end{aligned}\right\} \text{§ 3; 4.}$$

$$\therefore \frac{a+b}{a-b} = \frac{tg\,\frac{\alpha+\beta}{2}}{tg\,\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{cotg\,\frac{\gamma}{2}}{tg\,\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

I n j e d e m D r e i e c k e v e r h ä l t s i c h d i e S u m m e z w e i e r S e i t e n s t r e c k e n z u i h r e r D i f f e r e n z, w i e d e r T a n g e n s d e r h a l b e n S u m m e d e r g e g e n ü b e r l i e g e n d e n W i n k e l z u m T a n g e n s d e r h a l b e n D i f f e r e n z d e r s e l b e n.

Th. Fink (aus Flensburg in Schleswig): Geometriae rotundi libri XIII. Basileae 1583. Lib. X.

Beispiel. Für $a = 60^{cm}$, $c = 50^{cm}$, $\beta = 41^0\,17'$ ergiebt sich

$$tg\,\frac{\alpha-\gamma}{2} = \frac{a-c}{a+c}\,.\,cotg\,\frac{\beta}{2};\ \frac{\beta}{2} = 20^0\,38'\,30''$$

$$lg\,(a-c) = 1$$

$$lg\,cotg\,\frac{\beta}{2} = 0{,}423998$$

$$D\,.\,E\,.\,lg\,(a+c) = 7{,}958607 - 10$$

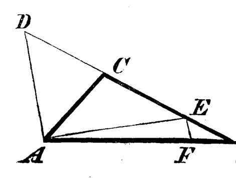
$$lg\,tg\,\frac{\alpha-\gamma}{2} = 9{,}382605 - 10 = lg\,tg\,13^0\,34'\,3''$$

$$\frac{575}{300} : 92$$

$$\frac{\alpha+\gamma}{2} = 69^0\,21'\,30''$$
$$\frac{\alpha-\gamma}{2} = 13^0\,34'\,3''$$

Durch Addiren und Subtrahiren beider Gleichungen erhält man:

$$\alpha = 82^0\,55'\,33''$$
$$\gamma = 55^0\,47'\,27''$$



Zusatz. Der vorstehende Satz lässt sich auch leicht mittels einer Construction in folgender Art beweisen: In dem Dreiecke ABC beschreibe man um C mit dem Radius CA einen Kreis, welcher BC in D und E schneidet, und ziehe $EF \parallel DA$. Dann ist $BD = a + b$, $BE = a - b$,

$$\sphericalangle\,ACD = \alpha + \beta,$$

$$\sphericalangle\,DEA = CAE = \frac{ACD}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\sphericalangle\,EAF = \alpha - \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\alpha-\beta}{2};\ \sphericalangle\,DAE = FEA = 90^0.$$

$$BD : BE = DA : EF = \frac{DA}{AE} : \frac{EF}{AE};$$

$$\therefore\ \frac{a+b}{a-b} = \frac{tg\,\frac{\alpha+\beta}{2}}{tg\,\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

6. Aus $a : c = sin\,\alpha : sin\,\gamma$ und $b : c = sin\,\beta : sin\,\gamma$ folgt

$$\frac{a \pm b}{c} = \frac{sin\,\alpha \pm sin\,\beta}{sin\,\gamma};$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{2\, sin\, \frac{\alpha+\beta}{2} \,.\, cos\, \frac{\alpha-\beta}{2}}{2\, sin\, \frac{\gamma}{2}\, cos\, \frac{\gamma}{2}} = \frac{cos\, \frac{\alpha-\beta}{2}}{sin\, \frac{\gamma}{2}}.$$

$$\text{I.} \qquad (a+b) : c = cos\, \frac{\alpha-\beta}{2} : cos\, \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{2\, cos\, \frac{\alpha+\beta}{2} \,.\, sin\, \frac{\alpha-\beta}{2}}{2\, sin\, \frac{\gamma}{2}\, cos\, \frac{\gamma}{2}} = \frac{sin\, \frac{\alpha-\beta}{2}}{cos\, \frac{\gamma}{2}}.$$

$$\text{II.} \qquad (a-b) : c = sin\, \frac{\alpha-\beta}{2} : sin\, \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

In jedem Dreiecke verhält sich $\begin{Bmatrix}\text{die Summe}\\ \text{die Differenz}\end{Bmatrix}$ zweier Seitenstrecken zur dritten, wie der $\begin{Bmatrix}\text{Cosinus}\\ \text{Sinus}\end{Bmatrix}$ der halben Differenz der gegenüber liegenden Winkel zum $\begin{Bmatrix}\text{Cosinus}\\ \text{Sinus}\end{Bmatrix}$ der halben Summe derselben.

Antonio Cagnoli: Trigonometria etc. Ed. 2. (Bologna 1804) 585. 586.

Anmerk. Man kann die Gleichungen I. und II. aus der vorstehenden Figur dadurch ableiten, dass man den Sinussatz auf die Dreiecke ABD und ABE anwendet.

Dividirt man beide Gleichungen durch einander, so erhält man den Fink'schen Satz (5.).

7. Aus dem Cosinussatze lassen sich Gleichungen ableiten, welche in vielen Fällen für die Berechnung der Winkel aus den Seitenstrecken eines Dreiecks bequemer sind.

Man hat nämlich (4)

$$1 \pm cos\,\alpha = 1 \pm \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc};$$

und $1 + cos\,\alpha = 2\, cos\, \frac{\alpha}{2}^2$, $1 - cos\,\alpha = 2\, sin\, \frac{\alpha}{2}^2$ (§ 3; 1. Zus. 1)

$$\therefore\ 2\, cos\, \frac{\alpha}{2}^2 = \frac{2\,bc + b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2\,bc}$$

$$cos\, \frac{\alpha}{2}^2 = \frac{(a+b+c)\,(b+c-a)}{4\,bc}$$

$$2\,sin\,\frac{\alpha}{2}^2 = \frac{2\,bc - b^2 - c^2 + a^2}{2\,bc} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2\,bc}$$

$$sin\,\frac{\alpha}{2}^2 = \frac{(a - b + c)\,(a + b - c)}{4\,bc}.$$

Setzt man $a + b + c = 2s$, so wird $b + c - a = 2\,(s - a)$, $a + b - c = 2\,(s - c)$, $a - b + c = 2\,(s - b)$, mithin

$$\text{I.} \qquad \left(cos\,\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{s\,(s - a)}{bc};$$

$$\text{II.} \qquad \left(sin\,\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{(s - b)\,(s - c)}{bc}.$$

Franz v. Schooten (Exercitat. mathem. libri V. Lugd. Bat. 1657. p. 499) schreibt die Entdeckung dieser Gleichungen dem William Purser, einem Mathematiker in Dublin, zu. Pfleiderer: Trig. S. 398.

Durch Division der Gleichungen I. und II. erhält man

$$\text{III.} \qquad \left(tg\,\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{(s - b)\,(s - c)}{s\,(s - a)}.$$

G. Joachim Rhäticus (1514—1574): De triquetris rectarum linearum in planitie p. 102 in: Opus Palatinum de triangulis, a Georgio Joachimo Rhetico coeptum: L. Valentinus Otho consummavit 1596.

Zusatz. Setzt man in

$$sin\,\alpha = 2\,sin\,\frac{\alpha}{2}\,cos\,\frac{\alpha}{2} \text{ (§ 3; 1. Zus.)}$$

für $sin\,\frac{\alpha}{2}$ und $cos\,\frac{\alpha}{2}$ die eben gefundenen Werthe ein, so ergiebt sich

$$sin\,\alpha = \frac{2}{bc}\sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}.$$

8. Projicirt man in einem Dreiecke je 2 Seitenstrecken auf die dritte, so findet man

$a = b\,cos\,\gamma + c\,cos\,\beta$; $b = c\,cos\,\alpha + a\,cos\,\gamma$; $c = a\,cos\,\beta + b\,cos\,\alpha$.

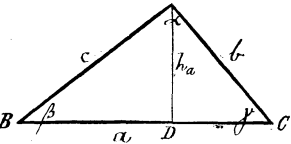
Anmerk. Bezeichnet man als „Grundaufgaben" diejenigen, in denen einzelne Stücke gegeben sind und gesucht werden, so ergiebt sich folgende Uebersicht derselben:

Gegeben:	Gesucht:
1) 3 Seitenstrecken;	1 Winkel.
2) 2 Seitenst. u. der eingeschl. Winkel;	die dritte Seitenstrecke.
3) — — — — — — — — —	1 Winkel.
4) 2 Seitenstr. und ein Gegenwinkel;	die dritte Seitenstrecke.
5) — — — — — — — — —	der andere Gegenwinkel.
6) — — — — — — — — —	der eingeschlossene Winkel.
7) 1 Seitenstrecke und 2 Winkel; .	eine Seitenstrecke.

§ 10.

b) Verschiedene Winkel und Strecken.

1. In dem Dreiecke ABC sei $AD = h_a$ die zur Seitenstrecke $BC = a$ gehörige Höhe. — Nun ist



$$h_a = c \,.\, sin\beta;$$

$$c = \frac{a \,.\, sin\gamma}{sin\alpha} \text{ (§ 9; 2.)}$$

$$\therefore\; h_a = \frac{a \,.\, sin\beta \,.\, sin\gamma}{sin\alpha} = \frac{a\, sin\beta\, sin\gamma}{sin\,(\beta + \gamma)}.$$

J. Newton (Arithm. univ. Lugd. Bat. 1732 p. 96) schliesst: $h_a \,.\, cotg\beta = BD$, $h_a\, cotg\gamma = DC$, $h_a = \frac{a}{cotg\beta + cotg\gamma} = \frac{a\, sin\beta\, sin\gamma}{sin\,(\beta + \gamma)}$.

2. Bezeichnet man unter den durch die Höhe h_a auf der Grundlinie a gebildeten Abschnitten BD durch b_1, CD durch c_1, so ist

$$b_1 : c_1 = c\, cos\beta : b\, cos\gamma$$

$$c : b = sin\gamma : sin\beta$$

$$\therefore\; b_1 : c_1 = cos\beta\, sin\gamma : sin\beta\, cos\gamma.$$

Wenn man diese Gleichung zu 1 addirt, dann von 1 subtrahirt und endlich die Resultate durch einander dividirt, so erhält man

I. $$\frac{b_1 + c_1}{b_1 - c_1} = \frac{sin\,(\beta + \gamma)}{sin\,(\beta - \gamma)}$$

II. $$\therefore\; \frac{a}{sin\alpha} = \frac{b_1 - c_1}{sin\,(\beta - \gamma)}.$$

Antonio Cagnoli: Trigonometria etc. 604.

Beisp. $b_1 = 45^{cm}$, $c_1 = 30^{cm}$, $\alpha = 67^0\, 13'$, $\beta = 61^0\, 42'\, 16{,}5''$.

3. Behalten wir die unter Nr. 2. angegebene Bezeichnung der durch die Höhe auf der Grundlinie a bestimmten Abschnitte bei und beachten, dass (§ 9; 2)

$$\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma},\;\therefore\; \frac{a}{sin\alpha} = \frac{b + c}{sin\beta + sin\gamma},$$

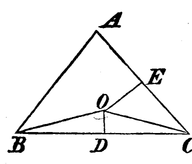
so ergiebt sich

$$\frac{b + c}{\sin\beta + \sin\gamma} = \frac{b + c}{2 \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2}} = \frac{b_1 - c_1}{\sin (\beta - \gamma)}$$

$$\therefore \frac{b + c}{b_1 - c_1} = \frac{\sin \frac{\beta + \gamma}{2}}{\sin \frac{\beta - \gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta - \gamma}{2}}.$$

M. Hirsch: Geom. Aufg. I. (Berlin 1805). § 70. — F. Seydewitz Trig. Aufg. (1839). S. 112.

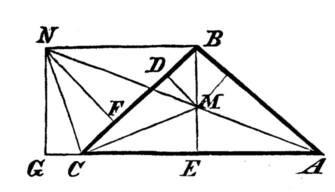
Beisp. $b + c = 125^{cm}$, $b_1 - c_1 = 25^{cm}$, $\alpha = 60^0$, $\beta - \gamma = 19^0\, 56'\, 54''$.



4. Errichtet man in den Mitten D, E der Seitenstrecken a, b des Dreiecks ABC, auf diesen Seitenstrecken Senkrechte, welche in O zusammentreffen, so ist O der Mittelpunkt des ABC umgeschriebenen Kreises (1. B. § 24; 9), $OB = OC = r$ der Radius desselben, mithin $\sphericalangle\, BOC = 2\,\alpha$, $BOD = \alpha$,

$$\therefore BD = OB \,.\, \sin\alpha = r \sin\alpha$$
$$a = 2\, r \sin\alpha.$$

Man erhält eine Seitenstrecke eines Dreiecks, wenn man den Sinus des ihr gegenüber liegenden Winkels mit dem Durchmesser des umgeschriebenen Kreises multiplicirt.



5. Die Seitenlinien eines Dreiecks ABC können bekanntlich (1. B. § 29; 2) alle drei von vier Kreisen berührt werden. Es bezeichne ϱ den Radius des inneren Berührungskreises; ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 seien die Radien der äusseren, welche die Seitenstrecken a, b, c auf der äusseren Seite tangiren. Treffen die Halbirungslinien des Winkel β und γ in M, die ihrer an a liegenden Nebenwinkel $\pi - \beta$ und $\pi - \gamma$ in N zusammen; fällt man aus M auf a und b die Senkrechten MD und ME, aus N auf a und b die Senkrechten NF und NG: so ist $MD = ME = \varrho$, $NF = NG = \varrho_1$.

Da in dem Dreiecke MBC nach Voraussetzung $\sphericalangle\, MBC = \frac{\beta}{2}$, $\sphericalangle\, BCM = \frac{\gamma}{2}$ und daher $\sphericalangle\, CMB = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$ ist, so hat man (1.)

$$MD = \varrho = \frac{a \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{I. } \therefore \varrho = \frac{a \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{b \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}} = \frac{c \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}}.$$

In dem Dreiecke BNC ist $\sphericalangle\, CBN = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}$, $\sphericalangle\, BCN = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$, mithin $\sphericalangle\, BNC = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, daher

$$NF = \varrho_1 = \frac{a \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

In dem Dreiecke ANC hat man $\sphericalangle\, CAN = \frac{\alpha}{2}$, $\sphericalangle\, NCA = \frac{\pi}{2} + \frac{\gamma}{2}$, *und* $\sphericalangle\, ANC = \frac{\beta}{2}$, folglich

$$NG = \varrho_1 = \frac{b \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}.$$

$$\text{II. } \therefore \varrho_1 = \frac{a \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{b \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} = \frac{c \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}.$$

Auf gleiche Weise findet man

$$\text{III. } \varrho_2 = \frac{b \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}} = \frac{a \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{c \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}.$$

$$\text{IV. } \varrho_3 = \frac{c \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{a \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{b \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}.$$

6. Mittels der vorstehenden Gleichungen erhält man, wenn r der Radius des umgeschriebenen Kreises ist:

$$\text{I.} \begin{cases} \varrho_1 + \varrho_2 = c \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2};\ \varrho_3 - \varrho = c \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \\ \varrho_1 + \varrho_3 = b \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2};\ \varrho_2 - \varrho = b \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \\ \varrho_2 + \varrho_3 = a \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2};\ \varrho_1 - \varrho = a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

$$\text{II.} \begin{cases} \varrho_1 + \varrho_2 = 4 r \cos \frac{\gamma^2}{2};\ \varrho_3 - \varrho = 4 r \sin \frac{\gamma^2}{2} \ (4.) \\ \varrho_1 + \varrho_3 = 4 r \cos \frac{\beta^2}{2};\ \varrho_2 - \varrho = 4 r \sin \frac{\beta^2}{2} \\ \varrho_2 + \varrho_3 = 4 r \cos \frac{\alpha^2}{2};\ \varrho_1 - \varrho = 4 r \sin \frac{\alpha^2}{2}. \end{cases}$$

$$\text{III.} \quad \therefore \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho = 4 r.$$

Die Gleichung III. fand K. W. Feuerbach: Eigensch. des geradlinigen Dreiecks (1822.) § 5.

7. Multiplicirt man die Radien der 4 Berührungskreise paarweise (5), so erhält man

$$\text{I.} \begin{cases} \varrho_1 \varrho_2 = ab \cos \frac{\gamma^2}{2};\ \varrho \varrho_3 = ab \sin \frac{\gamma^2}{2}; \\ \varrho_1 \varrho_3 = ac \cos \frac{\beta^2}{2};\ \varrho \varrho_2 = ac \sin \frac{\beta^2}{2}; \\ \varrho_2 \varrho_3 = bc \cos \frac{\alpha^2}{2};\ \varrho \varrho_1 = bc \sin \frac{\alpha^2}{2}; \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt weiter

$$\text{II.} \begin{cases} \varrho_1 \varrho_2 + \varrho \varrho_3 = ab; \\ \varrho_1 \varrho_3 + \varrho \varrho_2 = ac; \\ \varrho_2 \varrho_3 + \varrho \varrho_1 = bc. \end{cases}$$

$$\text{III.} \therefore \varrho (\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3) + \varrho_1 \varrho_2 + \varrho_1 \varrho_3 + \varrho_2 \varrho_3 = ab + ac + bc.$$

Die Gleichung III. hat Feuerbach a. a. O. § 6.

8. Da (5.) $\quad \varrho = \dfrac{a \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}},$

und (4.) $a = 2\,r\,sin\,\alpha = 4\,r\,sin\,\frac{\alpha}{2}\,cos\,\frac{\alpha}{2}$

ist, so hat man

I. $\varrho = 4\,r\,sin\,\frac{\alpha}{2}\,sin\,\frac{\beta}{2}\,sin\,\frac{\gamma}{2}$.

Ebenso findet man (5. 4):

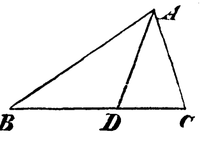
II. $\varrho_1 = 4\,r\,sin\,\frac{\alpha}{2}\,cos\,\frac{\beta}{2}\,cos\,\frac{\gamma}{2}$

III. $\varrho_2 = 4\,r\,cos\,\frac{\alpha}{2}\,sin\,\frac{\beta}{2}\,cos\,\frac{\gamma}{2}$

IV. $\varrho_3 = 4\,r\,cos\,\frac{\alpha}{2}\,cos\,\frac{\beta}{2}\,sin\,\frac{\gamma}{2}$.

Beispiel. $\alpha = 54^0\,37'\,40''$, $\beta = 75^0\,16'\,30''$, $r = 27^{dm}$, $\varrho = 12{,}813^{dm}$.

9. In dem Dreiecke ABC sei der Winkel $CAB = \alpha$ durch eine Gerade halbirt, welche $BC = a$ in D schneidet. — Nun ist



$$BD : AD = sin\,\frac{\alpha}{2} : sin\,\beta$$

$$AD : DC = sin\gamma : sin\,\frac{\alpha}{2};$$

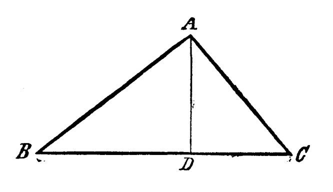
I. $\therefore\ BD : DC = sin\,\gamma : sin\,\beta.$

$$\frac{BD + DC}{BD - DC} = \frac{sin\,\gamma + sin\,\beta}{sin\,\gamma - sin\,\beta}.$$

II. $$\frac{a}{BD - DC} = \frac{cotg\,\frac{\alpha}{2}}{tg\,\frac{\gamma - \beta}{2}} = \frac{c + b}{c - b}\ (\S\ 9;\ 5).$$

Cagnoli: Trigon. 606.

10. In dem Dreiecke ABC sei von A auf BC die Senkrechte AD gefällt. —Nun ist



$$
\begin{aligned}
b : c &= \sin\beta : \sin\gamma \\
&= DBA : \sin\gamma \\
&= \cos BAD : \cos CAD \\
\therefore \frac{b+c}{b-c} &= \frac{\cos BAD + \cos CAD}{\cos BAD - \cos CAD} \\
&= \frac{\cotg \dfrac{CAD + BAD}{2}}{tg \dfrac{CAD - BAD}{2}}.
\end{aligned}
$$

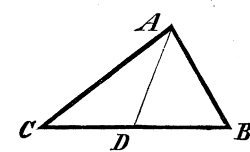
Ist nun $\beta > 90^0$ (Fig. I.), dann ist $\sphericalangle\ CAD - BAD = \alpha$,

I. $$\therefore \frac{b+c}{b-c} = \frac{\cotg \frac{1}{2}(CAD + BAD)}{tg \dfrac{\alpha}{2}}.$$

Wenn aber $\beta < 90^0$ ist (Fig. II.), so hat man $CAD + BAD = \alpha$,

II. $$\therefore \frac{b+c}{b-c} = \frac{\cotg \dfrac{\alpha}{2}}{tg \frac{1}{2}(CAD - BAD)}.$$

Cagnoli a. a. O. 605.



11. In dem Dreiecke ABC sei D die Mitte von BC. — Es ist nun

$$
\begin{aligned}
b : CD &= \sin CDA : \sin DAC \\
DB : c &= \sin BAD : \sin ADB \\
\therefore b : c &= \sin BAD : \sin DAC. \\
\therefore \frac{b+c}{b-c} &= \frac{\sin BAD + \sin DAC}{\sin BAD - \sin DAC}
\end{aligned}
$$

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{tg \dfrac{\alpha}{2}}{tg \frac{1}{2}(BAD - DAC)}.$$

Cagnoli a. a. O. 607.

§ 11.

c) Der Flächeninhalt.

1. Es soll der Flächeninhalt F eines Dreiecks ABC
   I. aus seinen Winkeln und Seitenstrecken,

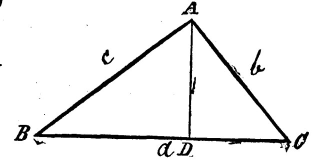
II. aus seinen Winkeln und dem Radius r des umgeschriebenen Kreises,

III. aus seinen Winkeln und den Radien ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 der eingeschriebenen Kreise berechnet werden.

Im ersten Falle ist der Flächeninhalt abzuleiten:

1) aus zwei Seitenstrecken und dem eingeschlossenen Winkel,
2) aus zwei Seitenstrecken und einem gegenüber liegenden Winkel,
3) aus einer Seitenstrecke und zwei Winkeln.

2. In dem Dreiecke ABC sei AD die zur Grundlinie a gehörige Höhe. — Dann ist (1. B. § 38; 6. Zus.)



$$F = \frac{a \cdot AD}{2}$$

$$AD = b \sin\gamma;$$

$$\therefore F = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}.$$

Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Längenprodukt zweier Seitenstrecken, multiplicirt mit dem Sinus des eingeschlossenen Winkels.

Regiomontan: De triangulis etc. II. 26.

Beispiel. $a = 57,3^{cm}$, $b = 68,4^{cm}$, $\gamma = 126^0\ 23'\ 28''$, $F = 1577,5^{\square cm}$.

3. Soll der Flächeninhalt aus b, c und γ berechnet werden, so hat man

$$AD = b \sin\gamma$$

$$CD = b \cos\gamma;\ BD = \sqrt{c^2 - b^2 \sin\gamma^2};$$

$$\therefore AC = b \cos\gamma \pm \sqrt{c^2 - b^2 \sin\gamma^2}$$

$$F = b \sin\gamma\,(b \cos\gamma \pm \sqrt{c^2 - b^2 \sin\gamma^2}).$$

Von den Vorzeichen des Wurzelausdrucks gilt das obere, $+$, wenn γ spitz, das untere, $-$, wenn γ stumpf ist. Ersteres tritt jedenfalls ein, wenn β stumpf ist. Liegt dieser Fall nicht vor, so ist γ nur dann unbedingt spitz, wenn $b > c$ ist.

Beispiel. Für $b = 9^{dm}$, $c = 7^{dm}$, $\gamma = 68^0$ hat man

$$F = 7 \, . \, sin\, 68^0 \, (7 \; cos\, 68^0 + \sqrt{(9 + 7\, .\, sin\, 68^0)\,(9 - 7\; sin\, 68^0)})$$

$$
\begin{aligned}
sin\, 68^0 &= 0{,}927184 \\
&\quad\; 7 \\
7\, .\, sin\, 68^0 &= 6{,}490288 \\
9 + 7\, sin\, 68^0 &= 15{,}490288 \\
9 - 7\, sin\, 68 &= 0{,}509712 \\
lg\; 15{,}490288 &= 1{,}190059 \\
lg\; 0{,}509712 &= 0{,}707325 - 1 \\
&\quad 0{,}897384 : 2 \\
&\quad 0{,}448692 = lg\; 2{,}8099. \\
cos\; 68^0 &= 0{,}3746066 \\
&\quad\; 7 \\
7\; cos\; 68^0 &= 2{,}622246 \\
&\quad 2{,}8099 \\
lg\; 5{,}432146 &= 0{,}734972 \\
lg\; 6{,}490288 &= 0{,}812264 \\
lg\; F &= 1{,}547236 = lg\; 35{,}256
\end{aligned}
$$

$F = 35{,}256 \square^{dm}$.

4. Für die Berechnung des Flächeninhalts aus der Seitenstrecke a und den Winkeln des Dreiecks hat man die Höhe

$$AD = \frac{a\; sin\beta\; sin\gamma}{sin\alpha}\; (\S\; 10;\; 1);$$

$$\therefore\; F = \frac{a^2\; sin\beta\; sin\gamma}{2\; sin\alpha}.$$

Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem Längenquadrate einer Seitenstrecke, multiplicirt mit den Sinus der anliegenden Winkel und dividirt durch den doppelten Sinus des gegenüber liegenden Winkels.

F. W. von Oppel: Analysis triangulorum. (1746) I. § 70.

Anmerk. Die 1. B. § 47; 1 gelöste Aufgabe, den Flächeninhalt eines Dreiecks aus den Seitenstrecken zu berechnen, lässt sich auch leicht trigonometrisch entwickeln. Man hat nämlich

$$F = \tfrac{1}{2}\; ab\; sin\gamma,$$

und (§ 9; 7. Zus.)

$$sin\gamma = \frac{2}{ab} \cdot \sqrt{s\;(s-a)\;(s-b)\;(s-c)}.$$

$$\therefore\; F = \sqrt{s\;(s-a)\;(s-b)\;(s-c)}.$$

5. Zur Bestimmung des Flächeninhalts mittels der Winkel des Dreiecks und des Radius r des umgeschriebenen Kreises hat man $F = \frac{a \,.\, c \,.\, sin\beta}{2}$ (2.)

$$a = 2\,r\,sin\alpha,\ c = 2\,r\,sin\gamma\ (\S\ 10;\ 4)$$
$$\therefore\ F = 2\,r^2\,sin\alpha\ sin\beta\ sin\gamma.$$

Beisp. $r = 14^{dm}$, $\alpha = 83^0\ 15'$, $\beta = 54^0\ 27'$, $F = 213{,}159^{\square dm}$.

6. Es sind endlich noch die Gleichungen zwischen dem Flächeninhalte, den Winkeln und den Radien der vier Berührungskreise des Dreiecks zu ermitteln.

Setzt man in die vorstehende Gleichung (5.) die aus § 10; 8 entnommenen Werthe für r ein, so erhält man

$$F = \frac{\varrho^2\ sin\alpha\ sin\beta\ sin\gamma}{8\ sin\ \frac{\alpha}{2}^2\ sin\ \frac{\beta}{2}^2\ sin\ \frac{\gamma}{2}^2},$$

I. $$= \varrho^2\ cotg\ \frac{\alpha}{2}\ cotg\ \frac{\beta}{2}\ cotg\ \frac{\gamma}{2};$$

$$F = \frac{\varrho_1{}^2\ sin\alpha\ sin\beta\ sin\gamma}{8\ sin\ \frac{\alpha}{2}^2\ cos\ \frac{\beta}{2}^2\ cos\ \frac{\gamma}{2}^2},$$

II. $$= \varrho_1{}^2\ cotg\ \frac{\alpha}{2}\ tg\ \frac{\beta}{2}\ tg\ \frac{\gamma}{2};$$

III. $$F = \varrho_2{}^2\ tg\ \frac{\alpha}{2}\ cotg\ \frac{\beta}{2}\ tg\ \frac{\gamma}{2};$$

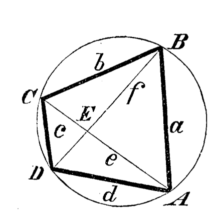
IV. $$F = \varrho_3{}^2\ tg\ \frac{\alpha}{2}\ tg\ \frac{\beta}{2}\ cotg\ \frac{\gamma}{2}.$$

Drittes Hauptstück:

Berechnung des Vierecks und $n$ecks.

§ 12.

Sehnen- und Tangentenvierecke.



1. In dem hohlwinkligen Sehnenvierecke $ABCD$ sei $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. — Da $\sphericalangle (a, b) + (c, d) = 180^0$, mithin $\cos (c, d) = - \cos (a, b)$ ist, so hat man

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2\, ab \cos (a, b) = c^2 + d^2 + 2\, cd \cos (a, b),$$

$$\therefore \cos (a, b) = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2\,(ab + cd)};$$

$$1 \pm \cos (a, b) = 1 \pm \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2\,(ab + cd)}.$$

$$1 + \cos (a, b) = \frac{(a + b)^2 - (c - d)^2}{2\,(ab + cd)}$$

$$= \frac{(a + b + c - d)\,(a + b - c + d)}{2\,(ab + cd)}$$

$$1 - \cos (a, b) = \frac{(c + d)^2 - (a - b)^2}{2\,(ab + cd)}$$

$$= \frac{(a - b + c + d)\,(- a + b + c + d)}{2\,(ab + cd)}.$$

Setzt man $a + b + c + d = 2\, s$, so wird

$$\text{I.} \qquad \cos \frac{(a, b)}{2} = \sqrt{\frac{(s - c)\,(s - d)}{ab + cd}}$$

$$\text{II.} \qquad \sin \frac{(a, b)}{2} = \sqrt{\frac{(s - a)\,(s - b)}{ab + cd}}.$$

$$\sqrt{(1 + \cos (a, b))\,(1 - \cos (a, b))} = \sin (a, b)$$

$$\text{III.} \quad \sin (a, b) = \frac{2\,\sqrt{(s - a)\,(s - b)\,(s - c)\,(s - d)}}{(ab + cd)}$$

$$\text{IV.} \qquad tg \frac{(a, b)}{2} = \sqrt{\frac{(s - a)\,(s - b)}{(s - c)\,(s - d)}}.$$



2. Schneiden einander die Diagonalen $AC = e$ und $BD = f$ in E, so ist

$$a^2 = AE^2 + BE^2 - 2\,AE\,.\,BE\cos(e, f)$$
$$b^2 = BE^2 + CE^2 + 2\,BE\,.\,CE\cos(e, f)$$
$$\therefore\; b^2 - a^2 = 2\,BE\,.\,e\,.\,\cos(e, f)$$
$$d^2 - c^2 = 2\,DE\,.\,e\,.\,\cos(e, f)$$
$$\therefore\; b^2 + d^2 - a^2 - c^2 = 2\,ef\cos(e, f).$$

Da aber $ef = ac + bd$ ist, so ergiebt sich

$$\cos(e, f) = \frac{b^2 + d^2 - a^2 - c^2}{2\,(ac + bd)}.$$

Hieraus ergiebt sich wie unter Nr. 1.

$$\cos\frac{(e, f)}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac+bd}};$$

$$\sin\frac{(e, f)}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-d)}{ac+bd}} \text{ u. s. w.}$$

Sturm: Ann. de Mathém. par Gergonne XIII. (1822—23) p. 314.

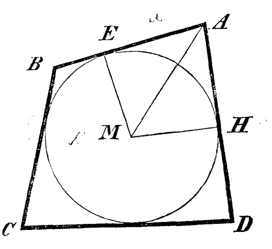
3. Bezeichnet r den Radius des Kreises, welcher dem Vierecke $ABCD$ umgeschrieben ist, so hat man (§ 10; 4)

$$2\,r = \frac{a}{\sin(d, f)} = \frac{b}{\sin(c, f)} = \frac{c}{\sin(b, f)} = \frac{d}{\sin(a, f)}.$$

4. Für den Flächeninhalt F des Sehnenvierecks hat man

$$F = \frac{ab + cd}{2}\,.\,\sin(a, b).$$

5. In einem hohlwinkligen Vierecke $ABCD$, welches einem Kreise mit dem Radius r und dem Mittelpunkte M umgeschrieben ist, sei $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$; die Seitenstrecken a und d werden in E und H vom Kreise berührt. — Da MA den Winkel (d, a) halbirt, so ist der Inhalt des Dreiecks AME



$$\frac{r^2}{2}\cot g\frac{(d, a)}{2},$$

mithin der Inhalt des Vierecks $AEMH$

$$r^2 \cot g\frac{(d, a)}{2}.$$

Für den Flächeninhalt V des Vierecks $ABCD$ ergiebt sich also

$$V = r^2 \left(cotg \frac{(a, b)}{2} + cotg \frac{(b, c)}{2} + cotg \frac{(c, d)}{2} + cotg \frac{(d, a)}{2} \right).$$

Anmerk. Für Sehnen- und Tangentenvierecke ergeben sich noch viele andere Sätze aus § 14.

§ 13.

Das einfache Viereck.

1. In einem einfachen Vierecke können unter den Seitenstrecken und Winkeln je sechs Stücke durch eine Gleichung verbunden werden, und zwar:

I. vier Seitenstrecken und zwei gegenüber liegende Winkel;

II. vier Seitenstrecken und zwei benachbarte Winkel;

III. drei Seitenstrecken, ein eingeschlossener und die beiden nicht eingeschlossenen Winkel;

IV. drei Seitenstrecken und drei Winkel, von denen zwei eingeschlossen sind.

2. Es sei zwischen den vier Seitenstrecken a, b, c, d und den zwei Winkeln (a, b), (c, d) eines einfachen Vierecks eine Gleichung herzustellen. — Das Längenquadrat der Diagonale, welche durch die Winkel (b, c) und (d, a) geht, hat die Werthe (§ 9; 4)

I. $a^2 + b^2 - 2\, ab \cos (a, b) = c^2 + d^2 - 2\, cd \cos (c, d)$.

Aus dieser Gleichung folgt

$(a + b)^2 - 2\, ab\, (1 + \cos (a, b)) = (c + d)^2 - 2\, cd\, (1 + \cos (c, d))$,

oder

$$(a + b)^2 - 4\, ab \cos \frac{(a, b)^2}{2} = (c + d)^2 - 4\, cd \cos \frac{(c, d)^2}{2};$$

ferner

$$(a - b)^2 + 4\, ab \sin \frac{(a, b)^2}{2} = (c - d)^2 + 4\, cd \sin \frac{(c, d)^2}{2};$$

$$(a + b)^2 - 4\, ab \cos \frac{(a, b)^2}{2} = (c - d)^2 + 4\, cd \sin \frac{(c, d)^2}{2};$$

$$(a - b)^2 + 4\, ab \sin \frac{(a, b)^2}{2} = (c + d)^2 - 4\, cd \cos \frac{(c, d)^2}{2};$$

und hieraus

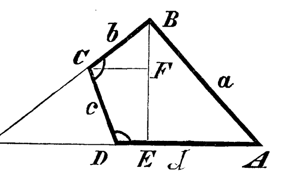


$$\text{II.} \begin{cases} (a+b+c+d)\,(a+b-c-d) = 4\,ab\cos\dfrac{(a,\,b)^2}{2} \\ \qquad\qquad - 4\,cd\cos\dfrac{(c,\,d)^2}{2}; \\ (a-b+c-d)\,(a-b-c+d) = 4\,cd\sin\dfrac{(c,\,d)^2}{2} \\ \qquad\qquad - 4\,ab\sin\dfrac{(a,\,b)^2}{2}; \\ (a+b+c-d)\,(a+b-c+d) = 4\,ab\cos\dfrac{(a,\,b)^2}{2} \\ \qquad\qquad + 4\,cd\sin\dfrac{(c,\,d)^2}{2}; \\ (a-b+c+d)\,(a-b-c-d) = -4\,ab\sin\dfrac{(a,\,b)^2}{2} \\ \qquad\qquad - 4\,cd\cos\dfrac{(c,\,d)^2}{2}. \end{cases}$$

Zusatz. Der Flächeninhalt V wird ausgedrückt durch

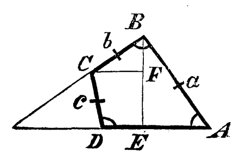
$$V = \frac{ab}{2}\sin(a,\,b) + \frac{cd}{2}\sin(c,\,d).$$

3. In dem Vierecke $ABCD$ sei zwischen den vier Seitenstrecken $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ und den beiden c anliegenden Winkeln eine Gleichung zu ermitteln. — Fällt man aus B auf AD die Senkrechte BE und aus C auf BE die Senkrechte CF, so ist



$$BE = c\sin(c,\,d) - b\sin[(b,\,c) + (c,\,d)];$$
$$EA = d - c\cos(c,\,d) + b\cos[(b,\,c) + (c,\,d)];$$
$$a^2 = BE^2 + EA^2,$$
$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 - 2\,bc\cos(b,\,c) - 2\,cd\cos(c,\,d) + 2\,bd\cos[(b,\,c) + (c,\,d)].$$

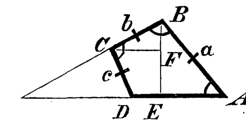
4. Es soll in dem hohlwinkligen Vierecke $ABCD$ zwischen den drei Seitenstrecken $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ und den drei Winkeln $DAB = (d,\,a)$, $(a,\,b)$, $CDA = (c,\,d)$ eine Gleichung ermittelt werden. — Fällt man aus B auf AD die Senkrechte BE und aus C auf BE die Senkrechte CF, so ist



$BE = a \sin (d, a)$

$BE = BF + FE = b \sin [(d, a) + (a, b)] + c \sin (c, d)$

$\therefore a \sin (d, a) = b \sin [(d, a) + (a, b)] + c \sin (c, d).$

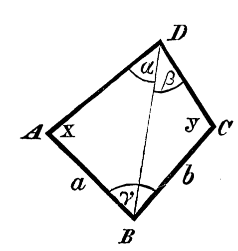


5. Zwischen den drei Seitenstrecken a, b, c und den drei Wiukeln (d, a), (a, b), (b, c) des Vierecks erhält man die gesuchte Gleichung aus der vorstehenden sofort, wenn man bedenkt, dass $\sphericalangle (c, d) = 360^0 - [(d, a) + (a, b) + (b, c)]$, also $\sin (c, d) = - \sin [(d, a) + (a, b) + (b, c)]$ ist. Man findet $a \sin (d, a) = b \sin [(d, a) + (a, b)] - c \sin [(d, a) + (a, b) + (b, c)]$.

J. H. Lambert: Beiträge zum Gebrauche der Math. 2. Theil (1770) VII.

Anmerk. Mittels der vorstehend unter Nr. 2—5 entwickelten vier Hauptgleichungen lassen sich folgende 14 Grundaufgaben lösen.

Gegeben:	Gesucht:
1) 4 Seitenstrecken und 1 Winkel;	ein benachbarter Winkel.
2) — — — — — —	der gegenüber liegende Winkel.
3) 3 Seitenstrecken und 2 der mittleren anliegende Winkel;	die vierte Seitenstrecke.
4) — — — — — —	ein Winkel.
5) 3 Seitenstrecken und die 2 der einen äusseren anliegenden Winkel;	die vierte Seitenstrecke.
6) — — — — — —	der zweite eingeschlossene Winkel.
7) — — — — — —	der zweite nicht eingeschl. Winkel.
8) 3 Seitenst. u. die 2 der vierten anlieg. W.;	die vierte Seitenstrecke.
9) — — — — — —	ein Winkel.
10) 3 Seitenstrecken u. 2 gegenüber lieg. W.;	die vierte Seitenstrecke.
11) — — — — — —	der andere eingeschl. Winkel.
12) — — — — — —	der andere nicht eingeschl. W.
13) 2 zusammenstossende Seitenstrecken und drei Winkel;	eine Seitenstrecke.
14) 2 gegenüber liegende Seitenstrecken und 3 Winkel;	eine Seitenstrecke.



6. In dem Vierecke $ABCD$ sei $AB = a$, $BC = b$, $\sphericalangle ABC = \gamma$, $\sphericalangle ADB = \alpha$, $\sphericalangle CDB = \beta$, $\sphericalangle BAD = x$, $\sphericalangle BCD = y$. — Nun ist

$$a : BD = \sin\alpha : \sin x$$
$$BD : b = \sin y : \sin\beta$$
$$\therefore\ a : b = \sin\alpha \sin y : \sin\beta \sin x$$

I. $$\frac{\sin y}{\sin x} = \frac{a \sin\beta}{b \sin\alpha}.$$

Nun ist $x + y = 360^0 - (\alpha + \beta + \gamma) = \varphi$, also $y = \varphi - x$, daher

$$\frac{\sin(\varphi - x)}{\sin x} = \frac{a \sin\beta}{b \sin\alpha}$$

$$\sin\varphi\ .\ cotg\, x - \cos\varphi = \frac{a \sin\beta}{b \sin\alpha}.$$

II. $$cotg\, x = cotg\, \varphi + \frac{a \sin\beta}{b \sin\alpha \sin\varphi}.$$

Setzt man in I. $\frac{a \sin\beta}{b \sin\alpha} = cotg\, \delta = \frac{\cos\delta}{\sin\delta}$, so ergiebt sich

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\sin\delta - \cos\delta}{\sin\delta + \cos\delta} = \frac{\sin\delta - \sin(90^0 - \delta)}{\sin\delta + \sin(90^0 - \delta)}$$

$$\frac{tg\,\frac{x - y}{2}}{tg\,\frac{x + y}{2}} = \frac{tg\,(\delta - 45^0)}{tg\, 45^0} \quad (\S\ 3;\ 4.\ \text{Zus. } 3).$$

III. $$tg\,\frac{(x - y)}{2} = tg\,\frac{\varphi}{2}\ .\ tg\,(\delta - 45^0).$$

Setzt man hingegen in II. $\frac{a \sin\beta}{b \sin\alpha \sin\varphi} = tg\,\psi$, so ist

$$cotg\, x = cotg\, \varphi + tg\,\psi.$$

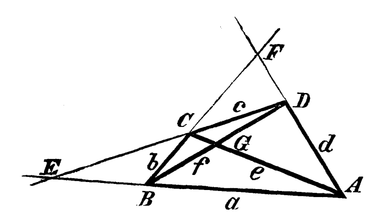
IV. $$cotg\, \varphi = \frac{\cos(\varphi - \psi)}{\sin\varphi \cos\psi}.$$

Anmerk. Die Aufgabe, aus den übrigen oben bezeichneten Stücken des Vierecks die Winkel x und y zu berechnen, löste zuerst W. Snell: Eratosthenes Batavus. Lugd. Bat. 1617, später Pothenot (1692), J. H. Lambert (1765) u. A.

§ 14.

Das vollständige Viereck.

1. In dem vollständigen Vierecke $(ABCD)$ sei $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Unter den sechs Seitenstrecken



schneiden einander die gegenüber liegenden a und c in E, b und d in F, e und f in G. — Projicirt man in dem Vierecke $ADBC$ die drei übrigen Seitenstrecken auf die Strecke e, so ist

$$e = d \cos (d, e) + f \cos (f, e) + b \cos (b, e)$$

$$\therefore e^2 = de \,.\, \cos (d, e) + ef \cos (e, f) + be \cos (b, e).$$

In den Dreiecken abe und cde ist aber

$$2\, de \,.\, \cos (d, e) = d^2 + e^2 - c^2$$

$$2\, be \,.\, \cos (b, e) = b^2 + e^2 - a^2.$$

I. $\quad \therefore 2\, ef \cos (e, f) = a^2 + c^2 - b^2 - d^2.$

Ebenso erhält man, wenn man in dem Vierecke $ABCD$ die drei übrigen Seitenstrecken zuerst auf a, dann auf d projicirt

II. $\quad 2\, ac \cos (a, c) = e^2 + f^2 - b^2 - d^2;$

III. $\quad 2\, bd \cos (b, d) = e^2 + f^2 - a^2 - c^2.$

Bezeichnet man der Kürze halber zwei gegenüber liegende Seitenstrecken als „Gegenstrecken", so drücken die Gleichungen I. II. III. folgenden Satz aus:

In einem vollständigen Vierecke ist die Summe aus den Längenquadraten zweier Gegenstrecken, vermindert um die Summe aus den Längenquadraten zweier andern Gegenstrecken, gleich dem doppelten Längenprodukte aus dem dritten Paare der Gegenstrecken, multiplicirt mit dem Cosinus ihres Winkels.

2. Wenn man die Gleichung III. von II. subtrahirt, so erhält man I., mithin ist auch

$$ef \cos (e, f) = ac \cos (a, c) - bd \cos (b, d).$$

In einem vollständigen Vierecke ist das Längenprodukt der beiden Gegenstrecken, die einen Punkt gemein haben, multiplicirt mit dem Cosinus ihres Winkels, gleich der Differenz aus den entsprechenden Produkten der beiden andern Paare von Gegenstrecken und ihrer Winkel.

3. Bezeichnet man die Verbindungslinien der Mittelpunkte von a und c durch δ_1, von b und d durch δ_2, von e und f durch δ_3, so ist (1. B. § 43; 9. III.)

$$4\,\delta_1{}^2 = -a^2 - c^2 + b^2 + d^2 + e^2 + f^2$$
$$4\,\delta_2{}^2 = a^2 + c^2 - b^2 - d^2 + e^2 + f^2$$
$$4\,\delta_3{}^2 = a^2 + c^2 + b^2 + d^2 - e^2 - f^2.$$

Verbindet man diese Gleichungen mit den Gleichungen I.—III. unter Nr. 1, so erhält man

$$4\,\delta_1{}^2 = b^2 + d^2 + 2\,bd\,cos\,(b, d) = e^2 + f^2 - 2\,ef\,cos\,(e, f)$$
$$4\,\delta_2{}^2 = a^2 + c^2 + 2\,ac\,cos\,(a, c) = e^2 + f^2 + 2\,ef\,cos\,(e, f)$$
$$4\,\delta_3{}^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac\,cos\,(a, c) = b^2 + d^2 - 2\,bd\,cos\,(b, d).$$

4. Es ist der Flächeninhalt der in dem vollständigen Vierecke ($ABCD$) enthaltenen Vierecke $ABCD$, $ABDC$ und $ADBC$ zu ermitteln. Nach 1. B. § 9; 10 kann dies auf folgende Art geschehen. Es ist

$$\overline{ABCD} = \overline{GAB} + \overline{GBC} + \overline{GCD} + \overline{GDA};$$
$$2\,.\,\overline{ABCD}_J = (AG\,.\,BG + BG\,.\,GC + GC\,.\,GD + AG\,.\,GD)\,sin\,(e, f).$$

I. $\overline{ABCD}_J = \frac{1}{2}\,ef\,sin\,(e, f).$

Ferner ist

$$\overline{ABDC} = \overline{FAB} + \overline{FBD} + \overline{FDC} + \overline{FCA}$$
$$= \overline{FAB} - \overline{FDB} + \overline{FDC} - \overline{FAC}$$
$$= \overline{ABD} - \overline{ACD} = \overline{ABG} - \overline{CDG}.$$

Da nun

$$2\,.\,\overline{FAB}_J = (FC + b)\,(FD + d)\,sin\,(b, d)$$
$$= (FC\,.\,FD + FC\,.\,d + FD\,.\,b + b\,.\,d)\,sin\,(b, d)$$
$$2\,.\,\overline{FDB}_J = (FD\,.\,b + FD\,.\,FC)\,sin\,(b, d)$$
$$2\,.\,\overline{FDC}_J = FD\,.\,FC\,sin\,(b, d)$$
$$2\,.\,\overline{FAC}_J = (FD\,.\,FC + FC\,.\,d)\,sin\,(b, d).$$

II. $\therefore\ \overline{ABDC}_J = \frac{1}{2}\,bd\,sin\,(b, d).$

Ebenso findet man

III. $\overline{ADBC}_J = \frac{1}{2}\,ac\,sin\,(a, c).$

Der Flächeninhalt eines Vierecks ist gleich dem halben Längenprodukte seiner Diagonalen multiplicirt mit dem Sinus ihres Winkels.

5. Es ist (1.) $cos\,(e, f) = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2 - d^2}{2\,ef}$,

$$\therefore\ 1 - cos\,(e, f)^2 = \frac{4\,e^2f^2 - (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2}{4\,e^2f^2}$$

$$\sin\,(e, f) = \frac{1}{2\,ef}\sqrt{4\,e^2f^2 - (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2}$$

$$4\,.\,\overline{ABCD}_J = 2\,ef\sin\,(e, f)\ (4.\ \text{I.}).$$

$$\therefore\ \overline{ABCD}_J = \tfrac{1}{4}\sqrt{4\,e^2f^2 - (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2}.$$

Ebenso erhält man

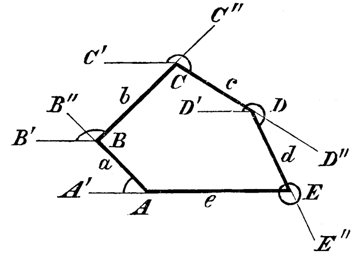
$$\text{II.}\ \overline{ABDC}_J = \tfrac{1}{4}\sqrt{4\,b^2d^2 - (e^2 + f^2 - a^2 - c^2)^2}.$$

$$\text{III.}\ \overline{ADBC}_J = \tfrac{1}{4}\sqrt{4\,a^2c^2 - (e^2 + f^2 - b^2 - d^2)^2}.$$

Die vorstehenden Sätze (1—5) giebt C. A. Bretschneider: Grunert's Archiv II. (1842) und Lehrgebäude der nied. Geom. (Jena 1844) § 605—618.

§ 15.

Das $n$eck.



1. Das einfache Fünfeck $ABCDE$ liege auf einem Strahlbündel, dessen einzelne gleichgerichtete Strahlen AA', BB', CC', DD', einer Seitenstrecke EA parallel seien. Denkt man sich die Figur durch Drehung einer Geraden in demselben Sinne um die Eckpunkte gebildet, so möge diese „erzeugende Gerade“, wenn sie mit den Seitenstrecken zusammenfällt, die Richtung AB'', BC'', CD'', DE'', EA' haben.

Setzt man $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DE = d$, $EA = e$ und $\sphericalangle\, A'AB'' = \alpha$, $B''BC'' = \beta$, $C''CD'' = \gamma$, $D''DE'' = \delta$, $E''EA' = \varepsilon$, so ist $\sphericalangle\, B'BC'' = \alpha + \beta$

$$\sphericalangle\, C'CD'' = \alpha + \beta + \gamma$$

$$\sphericalangle\, D'DE'' = \alpha + \beta + \gamma + \delta.$$

Projicirt man die Seitenstrecken auf die durch ihre Anfangspunkte gehenden Strahlen, so zeigt die blosse Ansicht der Figur, dass

$$\text{I.}\ a\sin\alpha + b\sin\,(\alpha + \beta) + c\sin\,(\alpha + \beta + \gamma) + d\sin\,(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 0$$

$$\text{II.}\ a\cos\alpha + b\cos\,(\alpha + \beta) + c\cos\,(\alpha + \beta + \gamma) + d\cos\,(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = -\,e.$$

Quadrirt man die beiden vorstehenden Gleichungen und addirt die Quadrate, so ergiebt sich

III. $e^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\,ab\,cos\,\beta + 2\,ac\,cos\,(\beta + \gamma)$
$+ 2\,ad\,cos\,(\beta + \gamma + \delta) + 2\,bc\,cos\,\gamma + 2\,bd\,cos\,(\gamma + \delta)$
$+ 2\,cd\,cos\,\delta.$

Es ist leicht, hiernach die entsprechenden Gleichungen für ein *n* eck herzustellen.

2. Wenn die Strahlen AA', BB'... keiner Seitenstrecke des Fünfecks parallel laufen, und man bezeichnet die Winkel $A'AB$, $B'BC$, $C'CD$... durch α_1, β_1, γ_1... so hat man

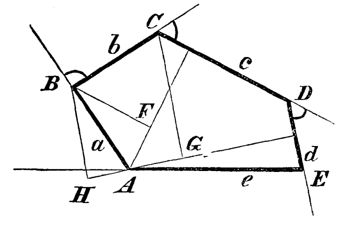
I. $a\,sin\,\alpha_1 + b\,sin\,\beta_1 + c\,sin\,\gamma_1 + d\,sin\,\delta_1 + e\,sin\,\varepsilon_1 = 0$
II. $a\,cos\,\alpha_1 + b\,cos\,\beta_1 + c\,cos\,\gamma_1 + d\,cos\,\delta_1 + e\,cos\,\varepsilon_1 = 0.$

Die letzte Gleichung stellt die Projection eines Fünfecks auf eine gegebene Gerade dar, und die erste drückt die Projection des Fünfecks auf eine zu jener senkrechten Geraden aus. Beide Gleichungen enthalten mithin den Satz:

Die Projection eines *n* ecks auf eine bestimmte Richtung einer Geraden ist null, wenn die Richtung jeder Seitenstrecke durch einen auf dem Umfange fortlaufenden Punkt bestimmt wird.

A. J. Lexell· Novi Comment. Petrop. 19. 20. (1775—76).

3. In dem Fünfecke $ABCDE$ werden die Schwenkungen (1. B. § 15; 1) an den Ecken A, B, C.. mit α, β, γ.. bezeichnet. Fällt man aus A auf b, c, d die Senkrechten h_b, h_c, h_d, so ist für den Flächeninhalt V des Fünfecks



$$2\,V = bh_b + ch_c + dh_d.$$

Es ist aber $h_b = a\,sin\,\beta$; a bildet mit c den Winkel $\beta + \gamma$, mit d den Winkel $\beta + \gamma + \delta$ etc. Zieht man durch B eine Parallele zu c, welche h_c in F trifft, so ist

$$h_c = b\,sin\,\gamma + a\,sin\,(\beta + \gamma).$$

Wird h_d von Geraden, die durch C und B parallel zu d laufen in G und H geschnitten, so hat man als Summe der Theile

$$h_d = c\,sin\,\delta + b\,sin\,(\gamma + \delta) + a\,sin\,(\beta + \gamma + \delta)$$
$$2\,V = ab\,sin\,\beta + bc\,sin\,\gamma + cd\,sin\,\delta + ac\,sin\,(\beta + \gamma) + bd\,sin\,(\gamma + \delta) + ad\,sin\,(\beta + \gamma + \delta).$$



Berichtigungen.

Seite 9, Zeile 4 schalte ein vor Punkt: zwischen dem ersten und letzten liegende

„ 12, „ 8 und 9 von unten lies: $\overline{ACB}$ statt: ACB, u. s. w.

„ 23 in der Figur lies: g statt: G.

„ 29, Zeile 9 lies: $2\,[n - 2\,(r - p)]$ statt: $2\,[2 - 2\,(r - p)]$.

„ 52, „ 16 von unten lies: $A'B'C'D'$ . . statt: $A'B'C'D'$.

„ 96, „ 16 lies: A_2A_3 statt: A_3A_3.

„ 99, „ 2 lies: Zus. statt: Zus. 1.

„ 107 in der oberen Figur streiche AC und ziehe BD.

„ 120, Zeile 7 lies: 14. statt: 10.

„ 168, „ 3 lies: liniges statt: iniges.

„ 172 in der Figur vertausche: D und D'.

„ 193, Zeile 1 von unten vertausche: collinear und Geraden.

„ 213, „ 9 „ „ lies: A', B', C' statt: $A'B'C'$.

„ 214 in der oberen Figur rücke A etwas nach links an $A'S'$.

„ 233, Zeile 4 von unten lies: Ecken statt: Seitenlinien auf den.

„ „ „ 3 „ „ lies: liegende Ecken statt: liegenden Seitenlinien.

„ „ „ 2 „ „ lies: sind statt: liegen.

„ 252, „ 14 „ „ lies: Ecken statt: Seitenlinien auf den.

„ „ „ 13 „ „ lies: liegende Ecken statt: liegenden Seitenlinien.

„ „ „ 12 „ „ lies: sind statt: liegen.

Pierer'sche Hofbuchdruckerei. Stephan Geibel & Co. in Altenburg.